



Уральский
федеральный
университет

имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина

Институт
фундаментального
образования

**А. А. ПОВЗНЕР
А. Г. АНДРЕЕВА
К. А. ШУМИХИНА**

ФИЗИКА

БАЗОВЫЙ КУРС

Часть II

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

А. А. Повзнер
А. Г. Андреева
К. А. Шумихина

ФИЗИКА

Базовый курс

Часть II

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета в качестве **учебного пособия**
для студентов вуза, обучающихся по инженерно-техническим
направлениям подготовки и специальностям

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2017

УДК 53(075.8)

ББК 22.3я73

П42

Рецензенты:

кафедра физики Уральского государственного горного университета (проф., д-р физ.-мат. наук *И. Г. Кориунов*); проф., д-р физ.-мат. наук *А. Д. Ивлиев* (Российский государственный профессионально-педагогический университет)

Научный редактор — проф., д-р физ.-мат. наук *А. В. Мелких*

Повзнер, А. А.

П42 Физика. Базовый курс : учебное пособие / А. А. Повзнер, А. Г. Андреева, К. А. Шумихина. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — Ч. 2. — 144 с.

ISBN 978-5-7996-1948-0 (часть 2)

ISBN 978-5-7996-1700-4 (общий)

В основу учебного пособия положен цикл лекций по базовому курсу дисциплины «Физика» модуля «Научно-фундаментальные основы профессиональной деятельности», читаемых на кафедре физики для студентов всех инженерно-технических направлений подготовки и специальностей УрФУ. В нем в краткой и доступной форме излагается курс физики, целью изучения которого является формирование научного мировоззрения, владение физико-математическим аппаратом, методами физических исследований с целью успешного освоения специальных дисциплин.

УДК 535.13 (075.8)

ББК 22.343 я73

ISBN 978-5-7996-1948-0 (часть 2)

ISBN 978-5-7996-1700-4 (общий)

© Уральский федеральный
университет, 2017

1. Электромагнитные явления

1.1. опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции

В 1831 году после десяти лет упорной работы опытным путем М. Фарадею удалось «превратить магнетизм в электричество», т. е. показать, что не только электрический ток создает в окружающем пространстве магнитное поле, но и магнитное поле способно порождать в замкнутом проводящем контуре электрический ток, получивший название индукционного тока.

Столь большой срок открытия связан с тем, что существовала неэквивалентность взаимосвязи электрических и магнитных явлений, а именно постоянный электрический ток порождает в окружающем пространстве постоянное магнитное поле, а для возникновения в замкнутом проводящем контуре постоянного индукционного тока необходимо было вызвать изменение магнитного потока Φ [1].

В опытах Фарадея магнитный поток, пронизывающий первый контур (катушку 1), изменялся различными способами (рис. 1.1): 1) замыкалась и размыкалась цепь второго контура; 2) с помощью реостата изменялась сила тока во втором контуре; 3) второй контур приближался или удалялся относительно первого контура; 4) постоянный магнит приближался или удалялся относительно первого контура; 5) движение совершал контур 1 относительно магнита и контура 2, по которому протекал постоянный ток, и т. д.

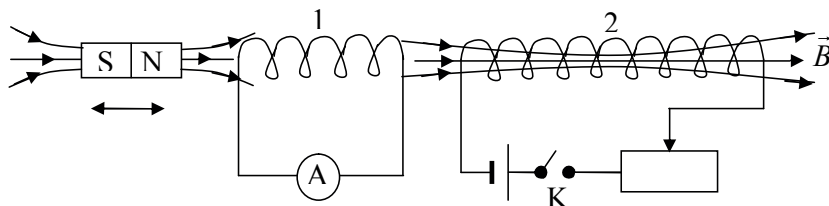


Рис. 1.1

Во всех этих опытах переменный магнитный поток, пронизывающий первый контур, приводил к возникновению в нем ЭДС индукции ε_i и индукционного тока I_i , который фиксировался амперметром. Причем индукционный ток изменял свое направление при смене направления движения магнита, направления движения контуров 1 и 2, при замене нарастающего тока в контуре 2 убывающим со временем током, при замене замыкания цепи второго контура ее размыканием [1].

В итоге *Фарадей показал, что сила индукционного тока I_i и ЭДС индукции ε_i зависят от скорости изменения магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, и не зависят от способа изменения магнитного потока Φ .*

1.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Природа сторонних сил. Правило Ленца

На основе проделанных опытов Фарадей сформулировал *закон электромагнитной индукции: при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, в нем возникает ЭДС индукции ε_i , равная скорости изменения магнитного потока, взятой с обратным знаком.*

$$\Phi_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int_S B dS \cos\alpha, \quad (1.1)$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий любую поверхность S , опирающуюся на проводящий контур.

Изменение со временем магнитного потока Φ может происходить либо за счет изменения угла α (вращения контура в магнитном поле), либо изменения площади S контура, либо изменения со временем магнитного поля, в котором находится контур. Во всех этих случаях в контуре возникает ЭДС индукции ε_i , т. е. возникают сторонние силы, совершающие работу по разделению разноименных электрических зарядов.

Природа сторонних сил может быть разной.

Случай 1. Вектор \vec{B} не зависит от времени, а площадь S контура или угол α изменяются.

В постоянном во времени магнитном поле возникновение ЭДС индукции \mathcal{E}_i в проводящем контуре (он вращается или изменяется его площадь) или в движущемся проводнике (изменяется площадь поверхности, описываемая проводником) обусловлена действием на свободные заряды силы Лоренца. Действительно, как видно из рис. 1.2, *а*, сила Лоренца вызывает движение электронов к одному концу проводника, на нем возникает избыток электронов, а на другом конце их недостаток. Следовательно, сила Лоренца разделяет разноименные заряды, т. е. является сторонней силой: $\vec{F}_L = \vec{F}_{\text{стор}}$.

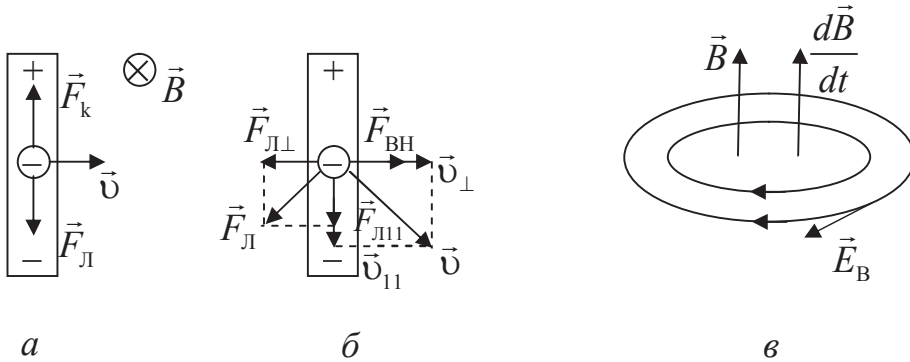


Рис. 1.2

Полезно обсудить вопрос о том, почему сила Лоренца разделяет разноименные заряды, т. е. ее работа отлична от нуля? Известно, что мощность силы Лоренца равна нулю ($N_L = \frac{A_L}{t} = F_L v \cos 90^\circ = 0$), т. е. она

не может совершать работу. Для ответа на этот вопрос отметим, что разделение зарядов происходит в промежутке времени, в течение которого под действием внешней силы \vec{F}_{BH} скорость проводника изменяется от нуля до постоянного значения v . В эти моменты времени суммарная скорость свободного электрона \vec{v} будет направлена под произвольным углом к проводнику (рис. 1.2, *б*) [1]. Поэтому, кроме параллельной, направленной вдоль проводника силы Лоренца $\vec{F}_{L\parallel}$ (она разделяет разноименные заряды и является сторонней силой), появляется перпендикулярная составляющая силы Лоренца $\vec{F}_{L\perp}$. Ее работа отлична от нуля за счет работы внешней силы \vec{F}_{BH} . Следовательно, несмотря на то, что суммарная сила Лоренца \vec{F}_L , равная

($\vec{F}_{\text{Л11}} + \vec{F}_{\text{Л}\perp}$), работу не совершает, работа составляющих ее сил отлична от нуля.

$$A_{\text{ВН}} \neq 0 \Rightarrow A_{\text{Л}\perp} \neq 0, \quad A_{\text{Л}} = A_{\text{Л}\perp} + A_{\text{Л11}} = 0, \quad A_{\text{Л11}} = -A_{\text{Л}\perp} \neq 0.$$

Таким образом, работа сторонней силы $\vec{F}_{\text{Л11}}$ происходит за счет работы внешней силы $\vec{F}_{\text{ВН}}$, ускоряющей проводник.

При постоянной скорости движения проводника ($v = \text{const}$) внешняя сила $\vec{F}_{\text{ВН}}$ и соответственно $\vec{F}_{\text{Л}\perp}$ отсутствуют и на свободные электроны в проводнике будут действовать только две равные по модулю и противоположные по направлению силы — сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л11}}$ и кулоновская сила $\vec{F}_{\text{К}}$, поэтому разделение зарядов будет отсутствовать и работа $\vec{F}_{\text{Л11}}$ обращается в ноль [1].

Во время ускорения проводника сумма сил $\vec{F}_{\text{Л}\perp}$, действующих на свободные электроны, создает силу Ампера (в металле появляется индукционный ток), которая действует на проводник и препятствует его ускорению [1]. При постоянной скорости движения сила Ампера не возникает и проводник движется в отсутствие внешней силы.

Случай 2. Вектор \vec{B} изменяется со временем, а площадь S контура и угол α остаются постоянными.

Опытным путем было доказано, что ЭДС индукции ε_i может возникать и в неподвижном проводящем контуре (проводнике), находящемся в переменном во времени магнитном поле. В этом случае на свободные заряды в проводнике сила Лоренца не действует ($v = 0 \Rightarrow F_{\text{Л}} = |q|vB \sin \alpha = 0$). Для объяснения возникновения ЭДС индукции ε_i Максвелл сформулировал следующее положение (постулат), которое называют первым положением теории Максвелла: *переменное во времени магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле*. Таким образом, Максвелл ввел новый вид поля — вихревое электрическое поле [1].

В отличие от электростатического поля линии вихревого электрического поля являются замкнутыми, они связаны с направлением вектора

тока $\frac{d\vec{B}}{dt}$ правилом левого буравчика и лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору \vec{B} (рис. 1.2, в). Силы этого поля являются

сторонними силами, они совершают работу по разделению разноименных зарядов

$$A_{\text{стор}} = \oint_{\Gamma} \vec{F}_{\text{стор}} d\vec{l} = q \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l} ; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_i = \frac{A_{\text{стор}}}{q} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l} , \quad (1.3)$$

где $\vec{E}_{\text{вихр}}$ — вектор напряженности электрического поля, а контур (Γ) (воображаемая линия) располагается внутри проводника (проводящего контура).

Наличие ЭДС индукции ε_i (1.3) в проводящем контуре сопротивлением R приводит к возникновению в нем индукционного тока, который можно рассчитать по закону Ома для полной цепи

$$I_i = \varepsilon_i / R. \quad (1.4)$$

Направление же индукционного тока можно найти по *правилу Ленца*: индукционный ток в контуре возникает такого направления, чтобы создаваемое им магнитное поле препятствовало любым изменениям магнитного потока, вызвавшего этот индукционный ток.

С правилом Ленца связан знак минус в формуле (1.1). Действительно, если магнитный поток Φ через плоскость контура возрастает, то тогда $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ и согласно (1.1) $\varepsilon_i < 0$, т. е. магнитный поток Φ_i , создаваемый индукционным током, будет противоположен по знаку магнитному потоку Φ . При убывании Φ $\frac{d\Phi}{dt} < 0$, $\varepsilon_i > 0$ и магнитные потоки Φ_i и Φ совпадают по знаку.

Рассмотрим пример определения направления индукционного тока по правилу Ленца (см. рис. 1.3). Пусть проводящий контур находится во внешнем магнитном поле \vec{B} , которое возрастает со временем ($(dB/dt) > 0$). Тогда магнитный поток Φ , пронизывающий контур, увеличивается ($\Delta\Phi > 0$), т. е. возрастает число линий \vec{B} , пересекающих поверхность контура. Согласно правилу Ленца, индукционный ток препятствует нарастанию Φ (увеличению числа линий \vec{B}), поэтому он создает свое магнитное поле \vec{B}_i , линии которого направлены против линий \vec{B} внешнего магнитного поля. Зная направление линий \vec{B}_i ,

определяем по правилу правого буравчика направление индукционного тока.

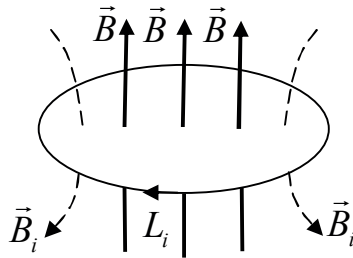


Рис. 1.3

Если же внешнее магнитное поле будет убывать со временем, то число линий \vec{B} , пронизывающих плоскость контура, будет также убывать ($\Delta\Phi < 0$) и, следовательно, линии \vec{B}_i индукционного тока будут направлены в ту же сторону, что и линии \vec{B} , и индукционный ток будет направлен против часовой стрелки.

1.3. Применение явления электромагнитной индукции в технике

Рассмотрим некоторые примеры применения явления электромагнитной индукции в технике.

1. *Определение модуля вектора магнитной индукции \vec{B} .* Для определения модуля \vec{B} в магнитное поле помещается катушка малой площади S поперечного сечения, содержащая N витков. В цепь катушки включается баллистический гальванометр, время измерения которого $\Delta t_{\text{и}}$ значительно превышает время Δt поворота катушки в магнитном поле из состояния 1 в состояние 2 (см. рис. 1.4). Поэтому такой прибор измеряет не силу индукционного тока, а заряд q , протекающий по цепи за время поворота Δt [1].

Получим формулу для модуля B . Введем понятие *потокосцепления* Ψ как произведение числа витков N на магнитный поток, пронизывающий один виток, и перепишем с учетом этого формулу (1.1)

$$\Psi = N \cdot \Phi, \quad \varepsilon_i = -\frac{d\Psi}{dt}. \quad (1.5)$$

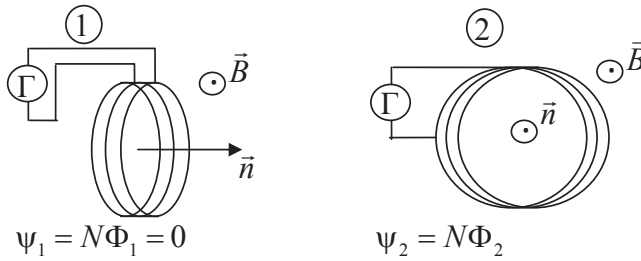


Рис. 1.4

Итак,

$$q = \int I_i dt = \int \frac{\varepsilon_i dt}{R_{\text{ц}}} = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \int \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\Psi = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \Delta\Psi n, q = -\frac{1}{R_{\text{ц}}} \Delta\Psi. \quad (1.6)$$

В нашем случае с учетом однородности поля в пределах катушки малого сечения и выражения (1.6) можно записать

$$q = -\frac{\Psi_2}{R_{\text{ц}}} = -\frac{N \cdot B \cdot S}{R_{\text{ц}}} \Rightarrow B = \frac{|q| R_{\text{ц}}}{N \cdot S},$$

где $R_{\text{ц}}$ — сопротивление цепи.

Полученное выражение по известным параметрам N , S , $R_{\text{ц}}$ и измеренного значения q позволяет найти значение модуля вектора \vec{B} в данной точке магнитного поля.

2. Токи Фуко — это индукционные токи, возникающие в массивных проводниках. Для таких проводников сопротивление R будет мало и поэтому индукционные токи (1.4) достигают большой величины. Их можно использовать для нагревания и плавления металлических заготовок, получения особо чистых сплавов и соединений металлов. Для этого металлическую заготовку помещают в индукционную печь (соленоид, по которому пропускают переменный ток). Тогда, согласно закону электромагнитной индукции, внутри металла возникают индукционные токи, которые разогревают металл и могут его расплавить. Создавая в печи вакуум и применяя левитационный нагрев (в этом случае силы электромагнитного поля не только разогревают металл, но и удерживают его в подвешенном состоянии вне контакта с поверхностью камеры), получают особо чистые металлы и сплавы.

Токи Фуко могут приводить и к нежелательным явлениям — к нагреву сердечников трансформаторов, электродвигателей и т. д. Поэтому в этих случаях увеличивают сопротивление массивного проводника, набирая его в виде отдельных пластин, и тем самым уменьшают нагрев проводников [1]. Действительно, сила индукционных токов в отдельных пластинах существенно уменьшается по сравнению с силой тока, текущего по массивной пластине, и в соответствии с формулой $Q = I^2 R t$ уменьшается и выделяемое в проводнике количество теплоты.

1.4. Явление самоиндукции

1.4.1. Индуктивность контура. Индуктивность соленоида

Возьмем контур, по которому протекает ток I . Он создает в окружающем пространстве магнитное поле, линии которого пронизывают плоскость контура (рис. 1.5). Возникающий при этом магнитный поток получил название *магнитного потока самоиндукции* Φ_S , т. к. сам ток наводит, индуцирует этот магнитный поток.

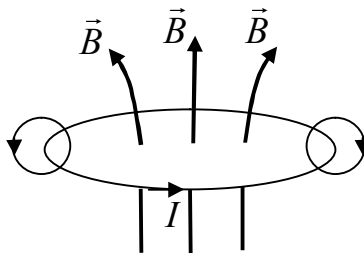


Рис. 1.5

Под явлением самоиндукции можно понимать явление возникновения магнитного потока самоиндукции при протекании по цепи тока. В случае, когда контур содержит N витков, используют понятие потокосцепления Ψ_S самоиндукции ($\Psi_S = N \Phi_S$) [1]. Оказывается, что Ψ_S и I прямо пропорциональны друг другу и поэтому можно записать

$$\Psi_S = LI, \quad (1.7)$$

где коэффициент пропорциональности L называют *индуктивностью контура*. Он описывает способность контура создавать потокосцепление самоиндукции и равен отношению Ψ_S к I .

$$L = \frac{\Psi_S}{I}. \quad (1.8)$$

Индуктивность контура зависит от геометрических размеров контура, а через относительную магнитную проницаемость μ и от магнитных свойств окружающей среды. Для ферромагнитных сред μ зависит от силы текущего по проводнику тока, что приводит к зависимости L от I для таких сред.

Приведем пример расчета индуктивности для длинного соленоида. Рассмотрим соленоид, для которого его длина во много раз превышает диаметр витков. Воспользовавшись формулой (1.8) и выражением для индукции бесконечно длинного соленоида, для L получим

$$L = \frac{\Psi_S}{I} = \frac{N \cdot \Phi_S}{I} = \frac{N \cdot B \cdot S \cdot \cos 0}{I} = \frac{N \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot I \cdot n \cdot S}{I} = \mu \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot V, \quad (1.9)$$

где V — объем, занимаемый соленоидом.

1.4.2. ЭДС самоиндукции. Правило Ленца

Можно дать другое эквивалентное определение явления самоиндукции, а именно, — *это явление возникновения ЭДС. индукции ε_i в том контуре, по которому протекает переменный ток*. Возникающие при этом ЭДС индукции ε_i и индукционный ток I_i называют ЭДС самоиндукции ε_S и током самоиндукции I_S . Для них с учетом формул (1.5) и (1.7) можно записать

$$\varepsilon_S = -\frac{d\Psi_S}{dt} = -L \frac{dI}{dt}, \quad I_S = \frac{\varepsilon_S}{R} = -\frac{L}{R} \frac{dI}{dt}. \quad (1.10)$$

Правило Ленца для явления самоиндукции формулируется следующим образом: *ток самоиндукции препятствует любым изменениям основного тока, текущего по цепи* [2].

Из формулы (1.10) следует, что любые изменения тока в цепи тормозятся и тем сильнее, чем больше индуктивность цепи и меньше ее сопротивление.

Можно сказать, что индуктивность цепи является мерой ее электрической инертности, подобно тому как масса в механике является мерой инертности тела при его поступательном движении [1].

1.4.3. Зависимость силы тока от времени при размыкании и замыкании цепи

Рассмотрим электрическую цепь, приведенную на рис. 1.6, *а*. Она содержит источник постоянного тока с ЭДС ε , катушку индуктивности L , сопротивления R и r , а также ключ K . Когда ключ K находится в положении 1, по цепи протекает постоянный ток $I_0 = \varepsilon/R$, а в катушке сосредоточена энергия в виде энергии W_M магнитного поля. В момент времени $t = 0$ ключ K перебрасывают в положение 2, цепь размыкается и ток в ней начинает убывать, он убывает постепенно за счет возникающего в катушке явления самоиндукции. При этом запасенная в катушке энергия магнитного поля расходуется на поддержание убывающего тока, на нагревание проводников.

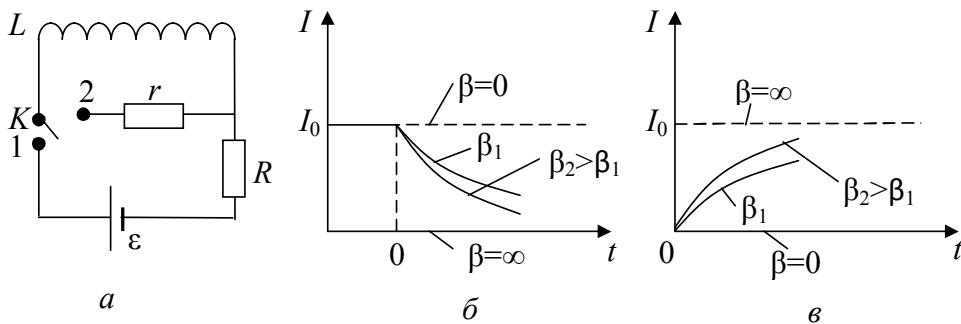


Рис. 1.6

Отметим, что размыкание электрической цепи означает, что в нее вводят бесконечно большое сопротивление r ($r \rightarrow \infty$) и поэтому $r \gg R$. Цепь считается разомкнутой, если сила тока в ней достигает значений порядка ~ 1 мкА, соответствующих случайным значениям силы тока, они связаны с тепловым движением свободных электронов в металле.

Выведем формулу для зависимости силы тока от времени при размыкании цепи. Для этого запишем закон Ома для полной цепи

$$\begin{aligned}
 Ir = \varepsilon_S, \quad -L \frac{dI}{dt} = Ir, \quad \frac{dI}{I} = -\beta dt; \\
 \int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\beta \int_0^t dt, \quad \ln \frac{I}{I_0} = -\beta t, \\
 I = I_0 e^{-\beta t}, \quad \beta = r / L.
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

На рис. 1.6, б приведены построенные по уравнению (1.11) зависимости силы тока I от времени t при различных значениях параметра β — от нуля ($L \rightarrow \infty$, соответствует отсутствию убывания тока в цепи) до бесконечности ($L \rightarrow 0$, ток мгновенно убывает до нуля). Из формулы (1.11) следует, что чем больше β , т. е. чем больше r или меньше L , тем быстрее убывает ток в цепи.

Рассмотрим, как изменяется ток при замыкании цепи, приведенной на рис. 1.6, а. Ключ K сначала находится в положении 2, тока в цепи нет ($I = 0$). В момент времени $t = 0$ ключ перебрасывают в положение 1. Ток в цепи начинает нарастать, он нарастает постепенно из-за возникающего в катушке явления самоиндукции [1]. Зависимость силы тока I от времени t можно найти, используя закон Ома для полной цепи

$$\varepsilon + \varepsilon_S = I R \Rightarrow I = I_0 (1 - e^{-\beta t}), \quad \beta = R / L. \tag{1.12}$$

На рис. 1.6, в приведены графики зависимости I от t , полученные из уравнения (1.12) для разных параметров β — от нуля ($L \rightarrow \infty$, ток в цепи не нарастает) до бесконечности ($L \rightarrow 0$, ток в цепи мгновенно достигает значения $I = I_0$). Видно, что чем больше β , т. е. чем больше R и меньше L , тем быстрее нарастает ток в цепи.

1.4.4. Энергия магнитного поля контура с током. Объемная плотность энергии магнитного поля

Любой контур индуктивности L , по которому протекает ток I , обладает энергией в виде энергии магнитного поля W_m . Выведем формулу для W_m исходя из закона сохранения энергии, а именно, при размыкании цепи энергия магнитного поля катушки расходуется на нагревание проводников [1]:

$$W_M = Q = \int_0^{\infty} I^2 r \cdot dt = I_0^2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-2\beta t} dt = I_0^2 r \left(-\frac{1}{2\beta} \right) e^{-2\beta t} \Big|_0^{\infty} = \frac{r}{2\beta} I_0^2 = \frac{L \cdot I_0^2}{2},$$

$$W_M = \frac{L \cdot I_0^2}{2}. \quad (1.13)$$

Введем *объемную плотность энергии w_M магнитного поля как энергию магнитного поля, заключенную в единице объема пространства*

$$w_M = \frac{dW_M}{dV} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu \cdot \mu_0}. \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) видно, что она зависит от модуля вектора магнитной индукции и от магнитных свойств окружающей среды, т. е. от μ [1]. Докажем справедливость формулы (1.14). Для этого рассмотрим однородное магнитное поле длинного соленоида с током, которое определяется по формуле $B = \mu \cdot \mu_0 \cdot n \cdot I$. С учетом формулы (1.9) для индуктивности L выразим объемную плотность энергии магнитного поля

$$w_M = \frac{dW_M}{dV} = \frac{W_M}{V} = \frac{LI^2}{2V} = \frac{\mu\mu_0 n^2 V}{2V} \left(\frac{B}{\mu\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0},$$

что и требовалось показать.

В случае неоднородного магнитного поля его энергию W_M , заключенную в конечном объеме V , можно определить по формуле

$$W_M = \int_V w_M dV = \int_V \frac{B^2(x, y, z)}{2\mu\mu_0} dV.$$

2. Колебания и волны

Колебания — это процессы, характеризующиеся определенной степенью повторяемости во времени (например, качание маятника часов, изменение напряжения в цепи переменного тока). В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему внешних сил различают свободные и вынужденные колебания. Свободные колебания совершаются в системе, предоставленной самой себе после однократного выведения ее из положения равновесия (например, качели). Свободные колебания могут быть незатухающими (в отсутствии трения или сопротивления среды) и затухающими. Вынужденные колебания обусловлены внешним периодическим воздействием (например, колебания иглы швейной машины).

Колебания называют периодическими, если значения описывающих их величин повторяются через одинаковый промежуток времени, называемый периодом T .

Простейшим типом периодических колебаний являются гармонические колебания — колебания, при которых описывающие их величины изменяются по закону косинуса (синуса).

2.1. Незатухающие механические колебания

2.1.1. Условия возникновения колебаний

Для возникновения незатухающих гармонических механических колебаний необходимы следующие условия: наличие у системы устойчивого положения равновесия; наличие возмущающего воздействия, выводящего систему из положения равновесия, действие упругой (или квазиупругой) силы, возвращающей систему в положение равновесия.

Квазиупругая сила — сила любой природы, подчиняющаяся закону Гука (т. е. направлена к положению равновесия и прямо пропорциональна смещению тела от положения равновесия). Таким образом, квазиупругая сила описывается законом

$$F_{yx} = -kx \quad (2.1)$$

где x — смещение тела от положения равновесия; k — коэффициент квазиупругой (упругой) силы.

Примерами систем, в которых происходят гармонические колебания, являются *пружинный* (рис. 2.1) и *математический* (рис. 2.2) маятники.

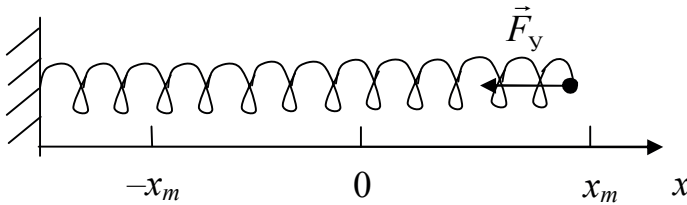


Рис. 2.1

Рассмотрим колебания пружинного маятника. После выведения груза из положения равновесия груз начинает двигаться под действием силы упругости, скорость груза постепенно нарастает и в момент прохождения положения равновесия ($x = 0$) становится максимальной. Потенциальная энергия пружины полностью переходит в кинетическую энергию груза. При дальнейшем движении груза скорость его начинает убывать (\vec{F}_y и ускорение направлены против смещения) и, достигнув точки с координатой $x = -x_m$, груз останавливается. Затем под действием силы упругости груз начинает двигаться в обратную сторону. Коэффициент k , входящий в силу упругости, — это коэффициент жесткости пружины.

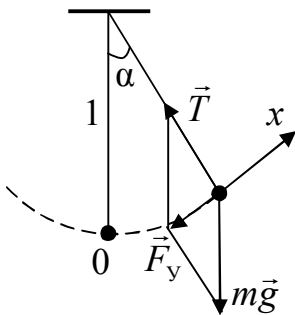


Рис. 2.2

Математический маятник — это материальная точка, подвешенная на невесомой, нерастяжимой нити длиной l , колеблющаяся под действием силы тяжести (рис. 2.2).

Колебания математического маятника будут гармоническими только при малых углах α отклонения нити от положения равновесия. Квазиупругая сила \vec{F}_y представляет собой проекцию на ось Ox результирующей силы, действующей на груз математического маятника.

Учитывая малые значения угла отклонения α ($\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \frac{x}{l}$), запишем

$$F_{\phi_x} = (\vec{T} + m\vec{g})_x = -mg \sin \alpha = -\frac{mg}{l}x = -kx \Rightarrow$$

$k = \frac{mg}{l}$ — значение коэффициента квазиупругой силы в случае математического маятника.

2.1.2. Уравнение незатухающих гармонических колебаний. Основные характеристики незатухающих колебаний (на примере пружинного маятника)

Гармонические колебания происходят в замкнутой механической системе ($F_{\text{внеш}} = 0$), в которой отсутствуют потери энергии на преодоление сил трения и сопротивления, под действием упругой (квазиупругой) силы. Согласно II закону Ньютона и выражению (2.1)

$$ma_x = F_{y_x} = -kx,$$

Учитывая, что $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ и вводя обозначение $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.2)$$

— дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.

Решения дифференциального уравнения (2.2) имеют вид:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.3)$$

где x — смещение от положения равновесия в момент времени t ; A — амплитуда колебаний, т. е. максимальное смещение (взятое по модулю) от положения равновесия; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ — фаза колебаний — величина, определяющая смещение от положения равновесия в данный момент времени и равная аргументу, стоящему под знаком косинуса (синуса); φ_0 — начальная фаза колебаний — определяет фазу колеба-

ний в начальный момент времени; ω_0 — циклическая частота незатухающих колебаний — скалярная физическая величина, численно равная числу полных колебаний, совершенных за 2π секунд.

Для описания колебаний применяют также следующие величины: T_0 — период незатухающих колебаний, т. е. минимальный промежуток времени, через который фаза колебаний принимает одинаковые значения, или промежуток времени, за которое совершается одно полное колебание; ν_0 — частота незатухающих колебаний, численно равная числу полных колебаний, совершенных системой за 1 секунду.

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0}, \quad (2.4)$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}. \quad (2.5)$$

В случае *пружинного маятника* циклическая частота и период незатухающих колебаний равны соответственно:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (2.6)$$

а для математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (2.7)$$

При гармонических колебаниях не только смещение, но и скорость, и ускорение меняются с течением времени по гармоническому закону. Пусть смещение тела от положения равновесия изменяется по закону косинуса:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.8)$$

Запишем выражения для проекций скорости v_x и ускорения a_x тела (м. т.) на ось Ox , совершающего гармонические колебания по закону (2.8)

$$v_x = \dot{x} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = -v_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.9)$$

$$a_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -a_m \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.10)$$

где $v_m = A \cdot \omega_0$ и $a_m = A \cdot \omega_0^2$ — амплитудные (максимальные) значения скорости и ускорения колеблющегося тела соответственно.

Графики зависимостей (2.8) — (2.10) при $\varphi_0 = 0$ представлены на рис. 2.3

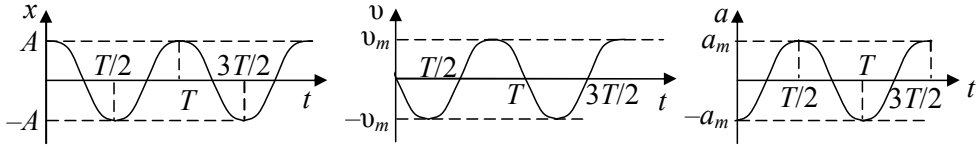


Рис. 2.3

В каждый момент времени система, совершающая гармонические колебания, обладает и кинетической, и потенциальной энергией:

$$W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{m}{2} A^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0); \quad (2.11)$$

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.12)$$

Полная механическая энергия системы

$$W = W_k + W_p = \frac{kA^2}{2}. \quad (2.13)$$

При выводе формулы (2.13) учтено, что $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Поскольку на систему действует только консервативная (упругая или квазиупругая) сила, то полная механическая энергия остается постоянной.

$$W = W_k + W_p = \frac{kA^2}{2} = W_{p_m} = W_{k_m} = \frac{mv_m^2}{2}$$

На рис. 2.4 приведены графики зависимости кинетической, потенциальной энергии системы, отвечающие зависимостям (2.11), (2.12) при $\varphi_0 = 0$, а также полной энергии.

Отметим, что для потенциальной и кинетической энергий период гармонических колебаний оказывается в два раза меньше, чем для смещения x .

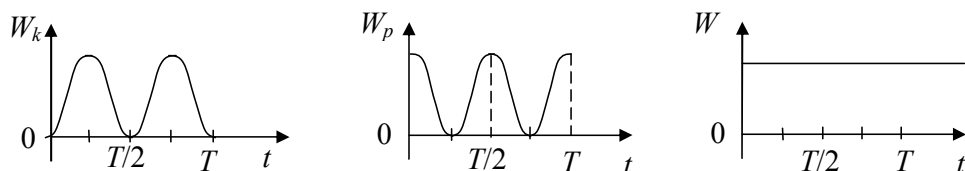


Рис. 2.4

2.2. Сложение гармонических колебаний

2.2.1. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Гармонические колебания можно представить с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебаний, а угол, образованный этим вектором с положительным направлением оси x в начальный момент времени, равен начальной фазе колебаний. Проекция вектора \vec{A} на ось Ox в начальный момент времени $t = 0$ равна $x(0) = A \cos \varphi_0$ (рис. 2.5).

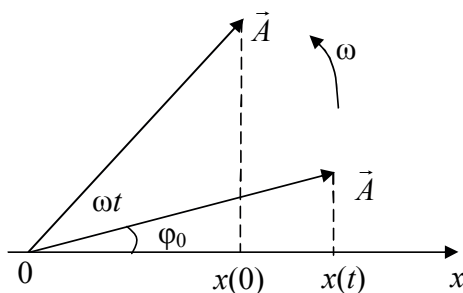


Рис. 2.5

При вращении конца этого вектора относительно точки O с угловой скоростью ω его проекция на ось x меняется по гармоническому закону $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Такой способ представления гармонических колебаний называют *векторной диаграммой* или *диаграммой вектора амплитуды*.

Пусть тело (м. т.) одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих в одном направлении,

причем амплитуды и начальные фазы колебаний различны ($A_1 \neq A_2$, $\varphi_{01} \neq \varphi_{02}$):

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), \quad (2.14)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}). \quad (2.15)$$

Результирующее движение, равное сумме колебаний x_1 и x_2 , будет также гармоническим колебанием той же циклической частоты ω [3]

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Необходимо найти амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Это можно сделать с помощью векторной диаграммы. Для этого проведем из точки O векторы с амплитудами A_1 и A_2 под углами φ_{01} и φ_{02} к оси Ox и приведем их во вращение с угловой скоростью $\bar{\omega}$ (рис. 2.6).

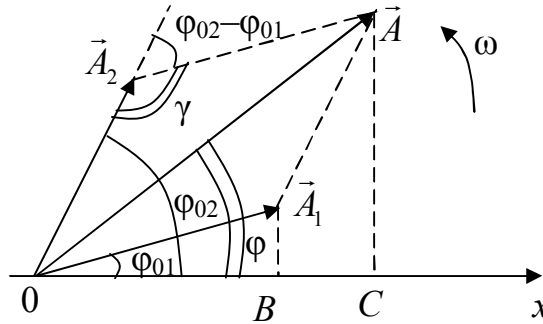


Рис. 2.6

При этом проекции векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 на ось Ox совершают гармонические колебания в соответствии с уравнениями (1.14), (1.15). Результирующее колебание будет изображаться проекцией на ось Ox вектора \vec{A} , полученного из векторов \vec{A}_1 и \vec{A}_2 по правилу параллелограмма. Из построения на рис. 2.6 следует, что квадрат амплитуды вектора \vec{A} можно найти по теореме косинусов из треугольника ΔOA_2A [3]

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \gamma, \quad \gamma = \pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \pi - \Delta\varphi;$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi. \quad (2.16)$$

Из треугольников $\triangle OAB$ и $\triangle OAC$ для начальной фазы φ_0 результирующего колебания можно найти следующее выражение:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{AC}{OC} = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (2.17)$$

Рассмотрим частные случаи сложения колебаний.

$$1. \quad \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = A_1 + A_2,$$

т. е. если разность фаз складываемых колебаний равна четному числу π , то тогда колебания максимально усиливают друг друга.

$$2. \quad \Delta\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = (2n+1)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow A = |A_1 - A_2|,$$

т. е. если разность фаз складываемых колебаний равна нечетному числу π , то тогда колебания максимально ослабляют друг друга.

$$3. \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

На рис. 2.7 приведены результаты сложения гармонических колебаний в рассмотренных выше случаях 1, 2 и 3 при условии, что $\varphi_{01} = 0$ и $A_1 > A_2$.

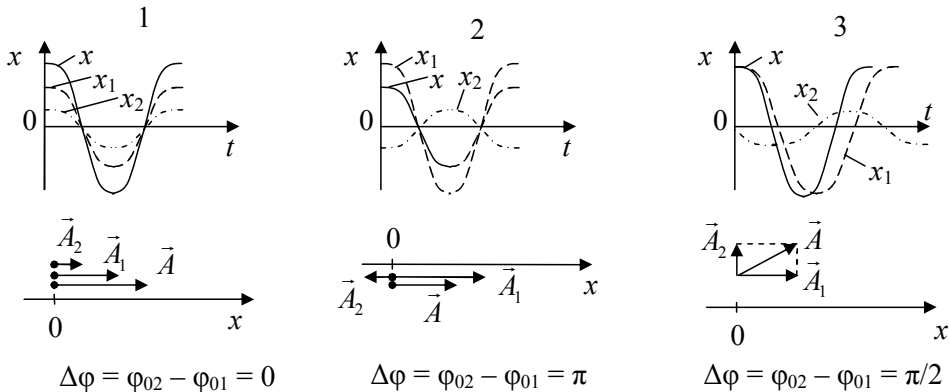


Рис. 2.7

Полученные условия максимального усиления (случай 1) и ослабления (случай 2) колебаний при сложении колебаний одного направления и одинаковой частоты будут использованы при изучении интерференции когерентных волн [3].

2.2.2. Биения

Биения — это колебания, которые получаются в результате сложения двух гармонических колебаний x_1 и x_2 одного направления с близкими частотами ($\omega_2, \omega_1 \gg \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$) [3]

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad x_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

Рассмотрим подробнее результат сложения таких колебаний. Для простоты расчетов будем считать, что амплитуды складываемых колебаний одинаковы: $A_1 = A_2 = A$. Тогда, используя формулу сложения косинусов

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

запишем

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t. \quad (2.18)$$

Первый сомножитель в выражении (2.18) изменяется со временем значительно медленнее второго ($\Delta\omega \ll \omega_2, \omega_1$), поэтому можно считать, что результирующее колебание x представляет собой колебание с циклической частотой $\omega = (\omega_1 + \omega_2) / 2$ и с изменяющейся со временем амплитудой

$$A_B(t) = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (2.19)$$

Итак, биения можно представить как колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Эти колебания не являются гармоническими колебаниями [3].

В общем случае амплитуда биений изменяется в пределах, заключенных в интервале от $|A_1 - A_2|$ до $(A_1 + A_2)$. При этом период изменения амплитуды (период биений T_B) и циклическая частота $\Delta\omega$ биений будут определяться по формулам:

$$\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|, \quad T_B = \frac{2\pi}{\Delta\omega}. \quad (2.20)$$

На рис. 2.8 приведены графики зависимости амплитуды биений A_B и смещения x м. т. от времени t .

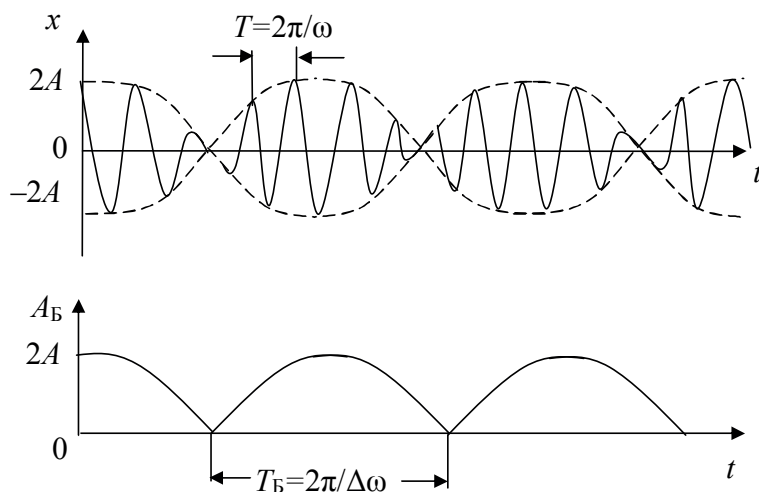


Рис. 2.8

Метод биений применяют, например, для настройки музыкальных инструментов, при анализе восприятия звуков человеком. Наглядно биения можно продемонстрировать на опыте, в котором звуковой генератор возбуждает два колебания разной частоты, которые человеческое ухо различает как два отдельных звуковых сигнала. Если сближать частоты этих сигналов, то при некоторой разности частот (она зависит от слухового восприятия конкретного человека) вместо двух сигналов ухо человека будет воспринимать звуковой сигнал одной частоты, амплитуда которого будет изменяться, т. е. в этом случае наблюдаются биения. При дальнейшем сближении частот период биений будет увеличиваться и при совпадении частот сигналов будет слышен звук одной частоты, амплитуда которого не будет изменяться [3].

Биения можно использовать, например, для определения частоты какого-либо гармонического электрического колебания. Для этого на вход осциллографа подают гармонические колебания от звукового генератора (частоту ν_Γ этих колебаний можно изменять) и гармонические колебания с неизвестной частотой ν от какого-либо источника. По наблюдаемой на экране осциллографа картине биений определяют период биений $T_\text{Б}$ и частоту колебаний ($\nu = \nu_\Gamma \pm 1/T_\text{Б}$). Знак плюс или минус в записанной формуле определяется следующим образом: если при увеличении частоты ν_Γ генератора период биений, наблюдаемых на экране, увеличивается, то тогда в формуле выбирается знак плюс ($\nu_\Gamma < \nu$), в противном случае знак минус ($\nu_\Gamma > \nu$) [3].

2.2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу

Пусть тело (м. т.) одновременно участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, происходящих вдоль осей Ox и Oy

$$x = A_1 \cos \omega_1 t, \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \Delta\varphi). \quad (2.21)$$

В общем случае в результате сложения этих колебаний материальная точка будет двигаться по траектории, определяемой соотношением их частот, амплитуд и разности начальных фаз $\Delta\varphi$.

а) Пусть частоты складываемых колебаний одинаковы:

$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t, \\ y = A_2 \cos(\omega t + \varphi). \end{cases}$$

Проводя математические преобразования и избавляясь от временной зависимости, получим уравнение траектории результирующего движения:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi. \quad (2.22)$$

Рассмотрим некоторые примеры сложения взаимно перпендикулярных колебаний.

Частные случаи:

$$1) \Delta\varphi = 0; \quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0; \quad \left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \right)^2 = 0;$$

$$y = \frac{A_2}{A_1} x \quad (2.23)$$

— уравнение прямой. Траектория движения в этом случае изображена на рис. 2.9, а.

$$2) \Delta\varphi = \pi; \quad \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0;$$

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x \quad (2.24)$$

— уравнение прямой. Траектория результирующего движения изображена на рис. 2.9, б.

$$3) \Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2};$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} = 1 \quad (2.25)$$

— уравнение эллипса (при $A_1 = A_2$ получается окружность).

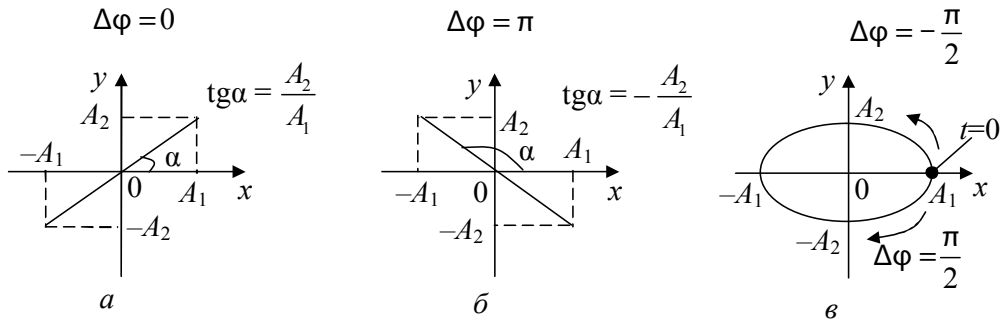


Рис. 2.9

Траектория результирующего движения изображена на рис. 2.9, в.

Разность начальных фаз определяет направление движения точки по траектории.

Рассмотрим направление движения м. т. по эллиптической траектории. В момент времени $t = 0$ м. т. находится в точке с координатами $x = A$, $y = 0$. Для разности фаз $\Delta\varphi = \pi/2$ ее движение по эллиптической траектории будет происходить по направлению движения часовой стрелки и соответственно против движения часовой стрелки для разности фаз, равной $\Delta\varphi = -\pi/2$ [3].

Действительно, если $\Delta\varphi = \pi/2$, то тогда для малых значений времени t координата y будет меньше нуля ($y = -\sin(\omega \cdot t) < 0$), что соответствует движению по направлению часовой стрелки [3].

Приведенные на рис. 2.9 траектории движения м. т. называют *фигурами Лиссажу*. В случае если частоты складываемых колебаний различны, получаются фигуры Лиссажу более сложной формы. Фигуры Лиссажу можно применять для определения частоты какого-либо гармонического колебания (сигнала). Для этого нужно на входы x и y осциллографа подать два сигнала — с известной (колебание поступает от генератора электромагнитных колебаний, его можно плавно изменять) и неизвестной частотой. Изменяя частоту генератора, можно добиться устойчивой фигуры Лиссажу и,

зная по ее виду отношение частот складываемых колебаний, определить неизвестную частоту.

2.3. Затухающие колебания

2.3.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение

В реальных условиях механические колебания всегда происходят в какой-либо среде. Взаимодействие колеблющейся механической системы со средой приводит к рассеянию (диссипации) энергии, она превращается во внутреннюю энергию среды.

В этом случае на тело, совершающего колебания, действуют квазиупругая сила (или упругая сила) и сила сопротивления среды $\vec{F}_{\text{сопр}}$, которая в частном случае при малых скоростях движения тела прямо пропорциональна его скорости движения и направлена противоположно ей.

$$F_{\text{сопр}x} = -r v_x = -r v', \quad (2.26)$$

где коэффициент r называют коэффициентом сопротивления среды.

Работа силы сопротивления приводит к уменьшению механической энергии замкнутой системы и уменьшению амплитуды колебаний. Для получения уравнения, выражающего зависимость смещения x тела от положения равновесия с течением времени, запишем II закон Ньютона в проекциях на ось движения, на ось Ox

$$F_{\text{сопр}x} + F_{yx} = m a_x \Rightarrow -r v_x + (-kx) = m a_x \Rightarrow \ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.27)$$

$$\beta = r / (2m), \quad (2.28)$$

где параметр β называют *коэффициентом затухания*.

Уравнение (2.27) является *дифференциальным уравнением затухающих колебаний*. Его решением является функция (*уравнение затухающих колебаний* в интегральной форме)

$$x(t) = x_m e^{-\beta t} \cos(\omega_3 t + \varphi_0). \quad (2.29)$$

Из этого уравнения следует, что амплитуда колебаний $A(t)$ убывает со временем по экспоненциальному закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad A_0 = x_m, \quad (2.30)$$

а циклическая частота затухающих колебаний ω_3 определяется формулой

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (2.31)$$

из которой следует, что $\omega_3 < \omega_0$.

Графики зависимости от времени t амплитуды колебаний $A(t)$ и смещения $x(t)$ приведены на рис. 2.10.

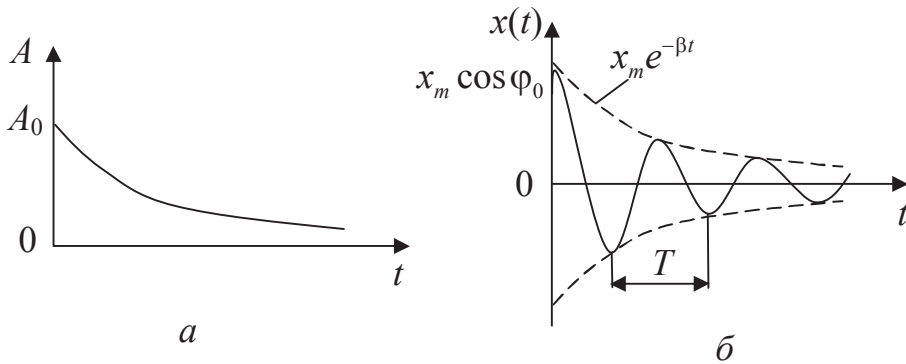


Рис. 2.10

Так как амплитуда колебаний пропорциональна их механической энергии, то можно сказать, что и энергия колебаний убывает также по экспоненциальному закону

$$W(t) = W_0 e^{-2\beta t}. \quad (2.32)$$

В заключение этого параграфа отметим, что из-за уменьшения с течением времени амплитуды колебаний затухающие колебания не являются периодическими. Но при малом затухании под *периодом* (его также называют *условным периодом*) можно понимать минимальное время, за которое повторяются минимальные или максимальные значения величин, описывающих колебательное движение (рис. 2.10). Аналогично циклическую частоту ω_3 затухающих колебаний называют *условной циклической частотой* [3].

2.3.2. Характеристики, вводимые для описания затухающих колебаний

Рассмотрим кратко величины, вводимые для описания затухающих колебаний.

1. *Критический коэффициент сопротивления среды* r_k — это такой коэффициент, при котором в системе происходит *апериодическое движение*. При этом изменение смещения груза к положению равновесия происходит в отсутствие колебательного движения (кривая 1 или 2 на рис. 2.11).

Убывание смещения x тела в механической системе по кривым 1 или 2 либо по кривой, расположенной между ними, зависит от начальных условий. Например, если поместить физический маятник в жидкую вязкую среду, и отклонив его от положения равновесия, отпустить без начальной скорости, то тогда смещение $x(t)$ маятника будет изменяться по кривой 1 (рис. 2.11). Если же отпустить маятник с начальной скоростью, направленной к положению равновесия, то тогда его смещение может со временем изменяться по кривой 2 (рис. 2.11), т. е. он пройдет один раз положение равновесия, затем отклонится, и после этого [3] будет монотонно приближаться к положению равновесия.

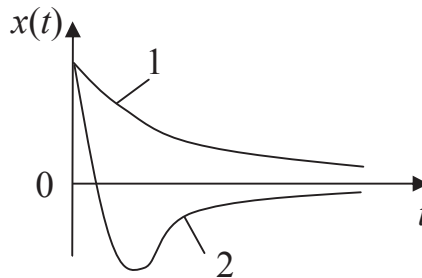


Рис. 2.11

Выведем формулу для критического коэффициента сопротивления среды r_k . При увеличении коэффициента угловая частота затухающих колебаний будет уменьшаться, а период колебаний T_3 будет возрастать и при равенстве $r = r_k$ можно получить:

$$r = r_k : \omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0, \quad T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \infty, \quad \omega_0 = \beta \Rightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{r_k}{2m};$$

$$r_k = 2\sqrt{mk}. \quad (2.33)$$

Для $r \geq r_k$ в среде наблюдается аperiodическое движение тела, а при $r < r_k$ в среде происходят затухающие колебания. Числовые значения r_k определяются массой тела, совершающего колебания, и жесткостью системы, которая совершает колебания (см. формулу (2.33)).

2. *Время релаксации* τ — это время, в течение которого амплитуда колебаний убывает в e раз (e — основание натурального логарифма)

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e, \quad A(t) = A_0 e^{-\beta t};$$

$$\tau = 1 / \beta. \quad (2.34)$$

За время релаксации в системе совершается N_e полных колебаний

$$N_e = \frac{\tau}{T_3} = \frac{1}{\beta T_3}. \quad (2.35)$$

3. *Логарифмический декремент затухания* δ равен натуральному логарифму отношения двух амплитуд, взятых через период:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T_3)} = \beta T_3 = \frac{1}{N_e}. \quad (2.36)$$

4. *Добротность* Q системы можно ввести [3] как величину, определяющую потери энергии колебаний системы за один условный период колебаний,

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T_3)}. \quad (2.37)$$

Полная энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды колебаний и поэтому выражение (2.36) можно записать в следующем виде:

$$Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T_3)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta}}. \quad (2.38)$$

Из формулы (2.38) следует, что чем выше добротность Q системы, тем медленнее в ней затухают колебания [3].

Для применяемых на практике систем $Q \geq 100$, т.е. для них выполняются условия *малого затухания*:

$$Q \gg 1 \Rightarrow \beta \ll \omega_0, \quad \omega \cong \omega_0, \quad T_3 = T, \quad \delta = \beta T \ll 1.$$

Тогда из формулы (2.38) получим ($e^x \approx 1 + x$, $x \ll 1$)

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi \tau}{T} = \pi N_e = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{r_k}{2r} = \frac{\sqrt{mk}}{r} = \frac{k}{\omega_0 r} = \frac{\omega_0 m}{r}. \quad (2.39)$$

2.4. Вынужденные механические колебания

2.4.1. Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение

Вынужденные механические колебания происходят, когда на систему, кроме упругой (квазиупругой) силы и силы сопротивления, действует внешняя, периодически изменяющаяся сила. Внешняя сила пополняет энергию системы, расходуемую на работу против силы сопротивления. Поэтому в системе с течением времени устанавливаются вынужденные колебания с постоянной амплитудой. Таким образом, вынужденные колебания являются незатухающими.

Пусть внешняя сила изменяется с частотой Ω по гармоническому закону: $F_x = F_0 \cos \Omega t$. Тогда в проекции на направление движения (ось Ox) II закон Ньютона имеет вид

$$ma_x = F_{y_x} + F_{\text{сопр}_x} + F_x = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t, \quad (2.40)$$

Учитывая, что $a_x = \ddot{x}$, $\dot{x} = \dot{x}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ и $\beta = \frac{r}{2m}$, получим

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t \quad (2.41)$$

— это дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (2.41) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$x = \underbrace{A_0 e^{-\beta t} \cos(\beta t + \varphi_0)}_{\text{общее решение однородного уравнения}} + \underbrace{A \cos(\Omega t - \varphi)}_{\text{частное решение неоднородного уравнения}}. \quad (2.42)$$

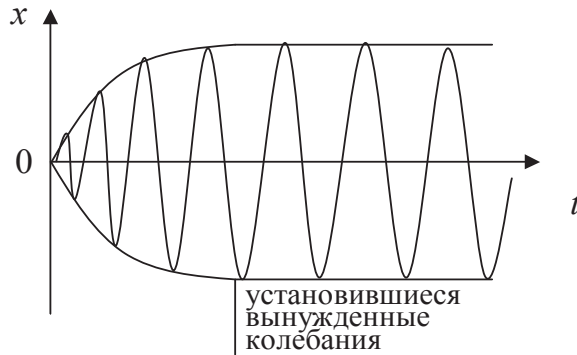


Рис. 2.12

С течением времени первое слагаемое в этом выражении быстро уменьшается, поэтому установившиеся вынужденные колебания описываются вторым слагаемым. График зависимости $x(t)$ в этом случае изображен на рис. 2.12. Частота установившихся вынужденных колебаний равна частоте внешней силы Ω , амплитуда A и начальная фаза φ определяются соотношениями:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}; \quad (2.43)$$

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (2.44)$$

В данном случае начальная фаза φ определяет сдвиг по фазе между установившимися вынужденными колебаниями и внешней силой.

2.4.2. Механический резонанс

Механический резонанс — это явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторой характерной для данной системы частоте $\Omega_{\text{рез}}$.

Найдем резонансную частоту вынужденных колебаний^

1) в случае, если $\beta = 0$ (сопротивление среды отсутствует), из формулы

(2.43) имеем $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}$, откуда видно, что $A \rightarrow \infty$ при $\Omega_{\text{рез}} = \omega_0$;

2) если $\beta \neq 0$, то резонансную частоту находим как частоту, при которой знаменатель выражения для амплитуды вынужденных колебаний (2.43) имеет минимум (при этом сама амплитуда достигает максимального значения):

$$\frac{d}{d\Omega} \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2} \right) = 0,$$

откуда получаем выражение для резонансной частоты

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (2.45)$$

Зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы называется резонансной кривой. Для построения резонансной кривой проанализируем зависимость (2.43) амплитуды установившихся колебаний A от частоты внешней силы Ω :

$$\Omega \rightarrow \infty, A \rightarrow 0; \quad \Omega \rightarrow 0, A \rightarrow \frac{F_0}{m\omega_0^2}.$$

Амплитуда колебаний при резонансе равна

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.46)$$

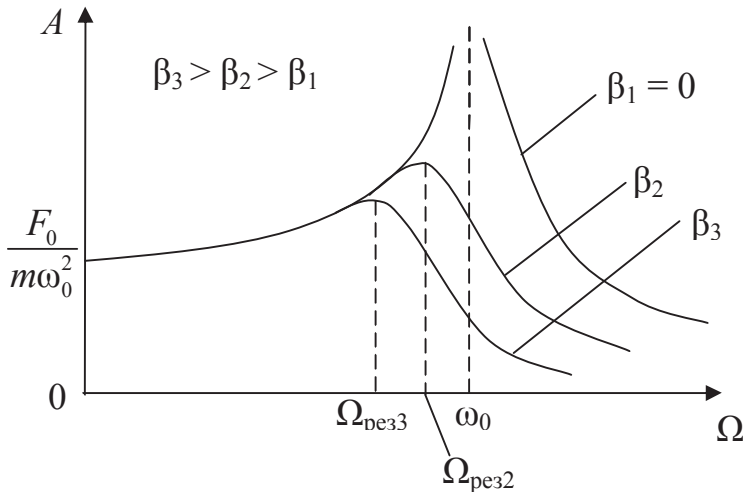


Рис. 2.13

На рис. 2.13 представлены резонансные кривые для различных значений коэффициента затухания β . Высота и ширина резонансного пика зависят от коэффициента затухания β .

2.4.3. Некоторые примеры проявления резонанса в природе и технике

При резонансе энергия поступает в систему согласованно с колебаниями в ней, постоянно увеличивая их амплитуду. В стационарном режиме большая амплитуда колебаний поддерживается малыми поступлениями энергии в систему, восполняющими потери энергии колебаний (нагрев проводников, преодоление сил сопротивления, потери на излучение электромагнитных и механических волн) за один период. В системе при резонансе созданы наиболее благоприятные условия для реализации свойственных системе свободных незатухающих колебаний и поэтому амплитуда колебаний резко возрастает [3].

Рассмотрим некоторые примеры проявления резонанса в природе.

Пример 1. Вентилятор плохо прикреплен к потолку и при своем вращении создает толчки на потолок, частота которых может совпасть с собственной частотой колебаний комнаты (потолка) как колебательной системы, амплитуда колебаний потолка нарастает и может привести к его обрушению [3].

Пример 2. Приборы на кораблях максимально утяжеляют (делают тяжелыми подставки) и подвешивают на мягких пружинах (коэффициент жесткости для них будет малым). В этом случае частота качки ω_k корабля будет больше собственной частоты колебаний ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$) приборов на пружинах и поэтому резонанса не наступает [3].

2.5. Волны в упругой среде

Волной называется процесс распространения колебаний в пространстве с течением времени. При распространении волны частицы среды волной не увлекаются (а лишь колеблются вблизи своих положений равновесия), но происходит перенос энергии от источника колебаний к точкам среды. Волны, переносящие в направлении своего распро-

странения энергию колебательного движения, называются *бегущими*. Механические волны могут распространяться только в *упругих средах*. Под упругой средой понимают среду, между частицами которой действуют упругие силы. Смещение от положения равновесия какой-то одной частицы в упругой среде из-за наличия сил упругости приводит к смещению соседней с ней частицы и т. д., в колебательный процесс вовлекаются все новые и новые частицы, говорят, что в среде распространяется упругая волна.

Различают *поперечные* и *продольные* механические волны.

В *поперечной* волне частицы среды совершают колебания в направлении, перпендикулярном направлению распространения волны (рис. 2.14, а). Такие волны могут распространяться в средах, в которых возможна деформация сдвига (т. е. в твердых телах и на поверхности жидкостей). Пример поперечной волны — волна на поверхности жидкости.



Рис. 2.14

В *продольной* волне частицы среды совершают колебания в направлении распространения волны (рис. 2.14, б). Такие волны распространяются в средах, в которых возможна деформация сжатия и разряжения (т. е. и в твердых телах, и в газах, и в жидкостях). Пример продольной волны — звук.

2.5.1. Основные характеристики волн

Волновая поверхность — геометрическое место точек среды, совершающих колебания в одинаковой фазе. В любой момент времени волновых поверхностей много и они неподвижны.

Фронт волны — геометрическое место точек среды, до которых дошло колебание в данный момент времени. В каждый момент времени волновой фронт один. В зависимости от формы волнового фронта волны бывают сферические, цилиндрические и плоские.

Фазовая скорость \vec{v} волны (скорость распространения волны в среде) — скорость перемещения в пространстве данной фазы колебаний.

Период T волны — время, за которое любая точка среды совершает одно полное колебание.

Длина волны λ — наименьшее расстояние между двумя точками среды, совершающими колебания в одинаковой фазе. Численно длина волны равна расстоянию, на которое перемещается фронт волны за время, равное периоду колебаний

$$\lambda = v \cdot T = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega}, \quad (2.47)$$

где ν — частота, ω — циклическая частота колебаний частиц среды.

Волновой вектор \vec{k} — вектор, сонаправленный с направлением распространения волны.

Волновое число k — модуль волнового вектора. Волновое число можно выразить через длину волны

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{Tv} = \frac{\omega}{v}. \quad (2.48)$$

2.5.2. Уравнение плоской механической волны. Волновое уравнение

Уравнение волны определяет смещение от положения равновесия ξ точек среды, находящихся на расстоянии x от источника колебаний [3]. Запишем уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси x . Пусть источник находится в начале координат (рис. 2.15) и совершает колебание по закону:

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t. \quad (2.49)$$

В произвольной точке M , находящейся на расстоянии x от источника колебаний, благодаря упругой связи между частицами среды, спустя некоторое время возникнут колебания с той же частотой и той же амплитудой (если среда не поглощает энергию), что и в источнике.

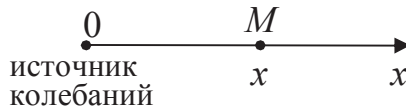


Рис. 2.15

Но так как волне нужно время, чтобы пройти это расстояние x , то колебания точки M будут отставать по фазе от колебаний в источнике.

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau), \quad (2.50)$$

где $\tau = \frac{x}{v}$ — время, необходимое для того, чтобы волна от источника

дошла до точки M .

С учетом этого

$$\xi(x, t) = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) = A \cos(\omega t - kx). \quad (2.51)$$

Уравнение (2.51) — это уравнение плоской монохроматической волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox . Если волна распространяется в отрицательном направлении оси Ox , то

$$\xi(x, t) = A \cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{v} \right) = A \cos(\omega t + kx). \quad (2.52)$$

С помощью уравнения волны (2.51) можно построить два различных графика:

- 1) «моментальная фотография» волны — зависимость смещения точек среды в данный момент времени от их координат (рис. 2.16, а);
- 2) «временная развертка» — зависимость смещения конкретной точки среды от времени (рис. 2.16, б).

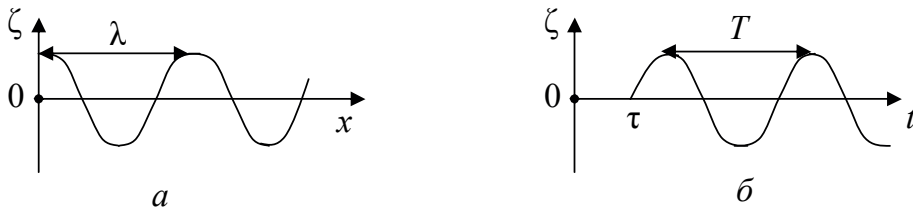


Рис. 2.16

Уравнение (2.51) плоской волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox , является решением дифференциального уравнения второго порядка, называемого волновым:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (2.53)$$

Решением уравнения (2.53) кроме плоской гармонической волны, бегущей в положительном направлении оси Ox (2.52), является также плоская гармоническая волна, распространяющаяся в отрицательном направлении против оси Ox [3].

Для плоской гармонической волны, распространяющейся в произвольном направлении, которое можно задать радиус-вектором \vec{r} , волновое уравнение и уравнение волны запишутся, соответственно, следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.54)$$

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}). \quad (2.55)$$

В общем случае решение волнового уравнения (2.54) зависит от дополнительных условий и в зависимости от них в качестве решения можно получить уравнение плоской, сферической или цилиндрической волны. Зная уравнение волны (2.51), можно найти скорость и ускорение частиц среды в любой момент времени:

$$V(x, t) = \dot{\xi}(x, t) = \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx + \varphi_0); \quad (2.56)$$

$$a(x, t) = \ddot{\xi}(x, t) = \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (2.57)$$

2.5.3. Стоячие волны

Стоячие волны образуются при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами. Рассмотрим случай сложения двух плоских волн, распространяющихся вдоль оси Ox в положительном ($\xi_1(x, t)$) и отрицательном ($\xi_2(x, t)$) направлениях.

$$\xi_1(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad \xi_2(x, t) = A \cos(\omega t + kx). \quad (2.58)$$

Уравнение стоячей волны (в соответствии с формулой сложения косинусов) можно записать в виде

$$\xi(x, t) = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t. \quad (2.59)$$

Видно, что частота колебаний стоячей волны равна ω , а амплитуда колебаний зависит от координаты x .

В точках среды, где $kx = \pm \pi m$ ($m = 0, 1, 2, 3 \dots$), амплитуда колебаний $|2A \cos kx|$ достигает максимального значения, равного $2A$. Эти точки называются *пучностями* стоячей волны. Учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, выразим координаты пучностей:

$$x_{\text{пуч}} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3 \dots). \quad (2.60)$$

В точках среды, где $kx = \pm \pi \left(m + \frac{1}{2}\right)$ ($m = 0, 1, 2, 3 \dots$), амплитуда колебаний обращается в нуль. Эти точки называются *узлами* стоячей волны. Координаты узлов:

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.61)$$

Расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны $\frac{\lambda}{2}$.

В отличие от бегущей волны, точки которой совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с разными фазами, все точки стоячей волны между двумя узлами колеблются с разными амплитудами, но с одинаковыми фазами. При переходе через узел множитель $2A \cos kx$ меняет свой знак, поэтому фазы колебаний по разные стороны от узла отличаются на π , т. е. точки, лежащие по разные стороны от узла, совершают колебания с противоположными фазами. Образование стоячих волн наблюдается, в частности, при наложении бегущей и отраженной волн. На границе, где происходит отражение волны, в зависимости от соотношения плотностей сред ρ_1 и ρ_2 мо-

жет возникнуть узел или пучность. Образование узла связано с тем, что при отражении от более плотной среды ($\rho_1 < \rho_2$) фаза волны меняется на противоположную. Если же волна отражается от менее плотной среды ($\rho_1 > \rho_2$), изменения фазы не происходит и у границы складываются колебания с одинаковыми фазами, то образуется пучность. Стоячая волна не переносит энергию, поэтому полная энергия стоячей волны, заключенная между узлами, остается постоянной. На рис. 2.17 изображено смещение от положения равновесия точек в стоячей волне в зависимости от координаты x при $\rho_1 > \rho_2$. На границе сред образовалась пучность, т. к. волна отражается от среды с меньшей плотностью ρ_2 .

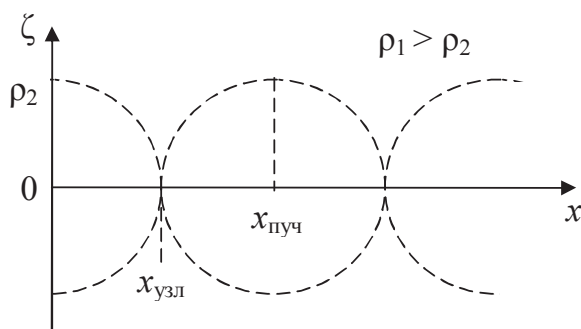


Рис. 2.17

2.6. Свободные незатухающие электромагнитные колебания

2.6.1. Колебательный контур. Условия возникновения колебаний

Электромагнитные колебания — это периодические изменения с течением времени электрических и магнитных величин: q — заряда, U — напряжения, I — силы тока; \vec{E} — напряженности электрического поля; \vec{B} — магнитной индукции; $W_{\text{эл}}$ — энергии электрического поля; $W_{\text{м}}$ — энергии магнитного поля и т. д. Электромагнитные колебания происходят в *электрическом колебательном контуре* — электрической цепи, содержащей последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку с индуктивностью L .

Свободные незатухающие электромагнитные колебания можно получить в *идеальном колебательном контуре*, т. е. в контуре, активное сопротивление которого $R = 0$. В идеальном колебательном контуре отсутствуют потери энергии колебаний на нагревание проводников.

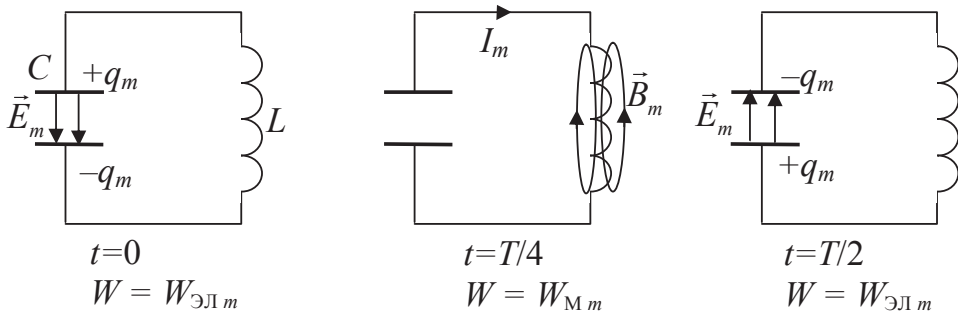


Рис. 2.18

Рассмотрим подробнее электромагнитные колебания, происходящие в идеальном колебательном контуре (рис. 2.18). Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) конденсатору сообщают максимальный заряд $q = q_m$. При этом сила тока и энергия магнитного поля катушки равны нулю, а полная энергия колебаний [3] совпадает с максимальной энергией электрического поля конденсатора.

Так как обкладки конденсатора соединены с концами катушки индуктивности, то конденсатор начинает разряжаться. Разрядный ток в контуре возрастает постепенно из-за возникновения в катушке ЭДС самоиндукции. В момент времени $t = T/4$ конденсатор полностью разряжается ($q = 0$), а сила тока достигает максимального значения ($I = I_m$). При этом первоначальная энергия $W_{\text{эл } m} = q_m^2 / 2C$ электрического поля конденсатора полностью перешла в энергию $W_{\text{М } m} = LI_m^2 / 2$ магнитного поля катушки.

В течение второй четверти периода конденсатор постепенно заряжается. В момент времени $t = T/2$ конденсатор полностью перезаряжается (знаки зарядов его обкладок меняются на противоположные по сравнению с первоначальным состоянием). Ток в контуре в этот момент времени снова равен нулю.

В течение третьей и четвертой четверти периода процессы повторяются, но в обратном направлении.

2.6.2. Уравнения незатухающих электромагнитных колебаний. Основные характеристики незатухающих электромагнитных колебаний

Поскольку в идеальном колебательном контуре потери энергии на джоулево тепло отсутствуют, полная энергия контура остается постоянной:

$$W_{\text{эл}m} = W_{\text{м}m} = W_{\text{эл}} + W_{\text{м}} = \text{const}, \quad (2.62)$$

а ее производная по времени равна нулю: $\frac{d}{dt}(W_{\text{эл}} + W_{\text{м}}) = 0$;

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} \right) = 0. \quad (2.63)$$

Учитывая, что сила тока — это первая производная от заряда по времени, т. е. $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, а $\dot{I} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$, и, вводя обозначение $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, уравнение (2.63) преобразуем к виду

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (2.64)$$

Это дифференциальное уравнение описывает зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени. Решениями уравнения (2.64) является гармоническая функция

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.65)$$

где ω_0 — циклическая частота незатухающих колебаний; φ_0 — начальная фаза; q_m — максимальное (амплитудное) значение заряда на обкладках конденсатора.

Период свободных электромагнитных колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2.66)$$

Зависимость от времени силы тока в контуре:

$$I = \dot{q} = -q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.67)$$

где $q_m \omega_0 = i_m$ — амплитудное значение силы тока в контуре.

Зависимость от времени разности потенциалов на обкладках конденсатора:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (2.68)$$

где $q_m / C = U_m$ — амплитудное значение напряжения на конденсаторе.

Графики зависимостей (2.65), (2.67), (2.68) при $\varphi_0 = 0$ представлены на рис. 2.19.

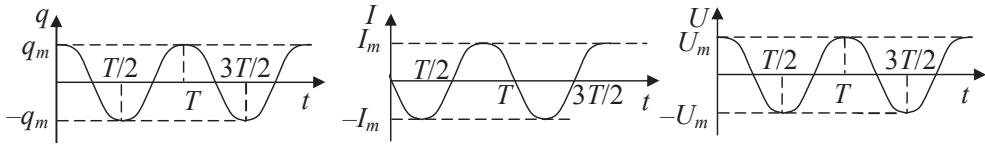


Рис. 2.19

Энергия электрического поля изменяется с течением времени по закону

$$W_{\text{эл}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.69)$$

Зависимость от времени энергии магнитного поля:

$$W_{\text{м}} = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2} q_m^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2.70)$$

На рис. 2.20 приведены графики, выражающие зависимости (при $\varphi_0 = 0$) энергии электрического и магнитного поля в колебательном контуре, а также полной энергии контура от времени.

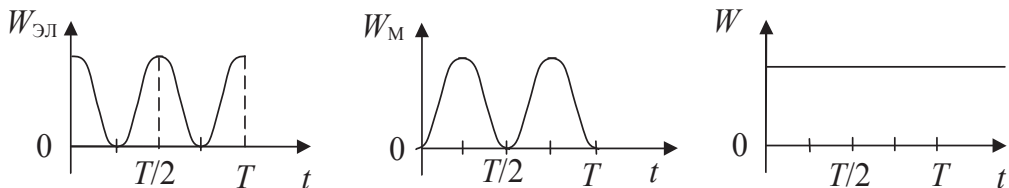


Рис. 2.20

2.7. Затухающие электромагнитные колебания

2.7.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение

Затухающие электромагнитные колебания возникают в колебательном контуре, который, кроме катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C , обладает активным сопротивлением R (рис. 2.21). При протекании тока через сопротивление R выделяется мощность, которую можно найти по закону Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$.

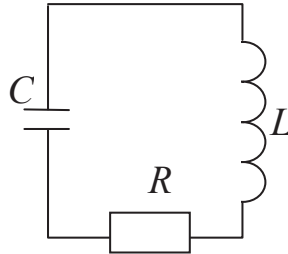


Рис. 2.21

Вследствие этого полная энергия контура уменьшается с течением времени:

$$-\frac{d}{dt}(W_{\text{эл}} + W_{\text{м}}) = I^2 R. \quad (2.71)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}\right) = I^2 R. \quad (2.72)$$

Учитывая, что $I = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$, а $\dot{I} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$; $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и, вводя обозначение

$$\beta = R / 2L, \quad (2.73)$$

получим

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad (2.74)$$

— это дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний. Решение этого уравнения описывает изменение заряда на обкладках конденсатора с течением времени:

$$q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.75)$$

где амплитуда колебаний заряда на обкладках конденсатора $q_m(t)$ убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$q_m(t) = q_{m0} e^{-\beta t}, \quad (2.76)$$

где β — коэффициент затухания — характеризует быстроту уменьшения амплитуды колебаний; частота ω затухающих колебаний связана с частотой ω_0 незатухающих колебаний соотношением

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (2.77)$$

График зависимости заряда от времени изображен на рис 2.22.

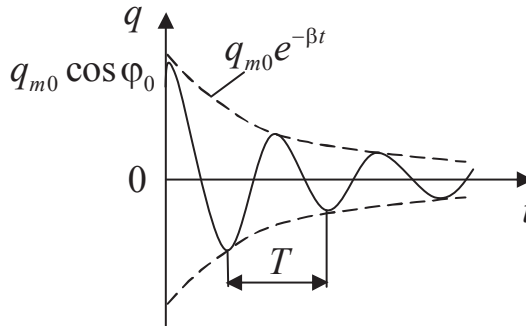


Рис. 2.22

Зависимость полной энергии колебательного контура от времени имеет вид:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}. \quad (2.78)$$

График зависимости полной энергии колебательного контура от времени имеет такой же вид, как и график зависимости (рис. 2.23) полной механической энергии от времени для системы, совершающей затухающие колебания.

2.7.2. Характеристики затухающих электромагнитных колебаний

Частота затухающих колебаний связана с частотой ω_0 собственных колебаний и коэффициентом β затухания, а также с параметрами контура соотношением:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (2.79)$$

Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (2.80)$$

Логарифмический декремент затухания характеризует уменьшение амплитуды колебаний за один период и численно равен:

$$\lambda = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)} = \beta T, \quad (2.81)$$

где $q_m(t)$, $q_m(t+T)$ — амплитуды заряда на обкладках конденсатора, соответствующие моментам времени, отличающимся на период.

Время релаксации τ — время, за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз:

$$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}. \quad (2.82)$$

В колебательном контуре, обладающем C , L и R , возможны следующие режимы работы:

1) при малом затухании ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) происходит периодическое изменение заряда на обкладках конденсатора $q = q_{m0} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$. Этот режим называется периодическим (рис. 2.22);

2) при сильном затухании ($\beta^2 \gg \omega_0^2$) колебаний заряда не происходит (рис. 2.23), величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — мнимая. Этот режим называется аperiodическим;

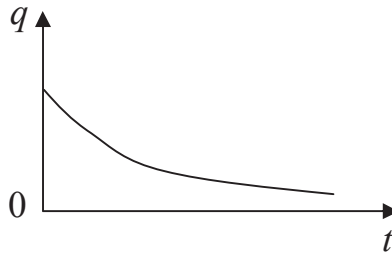


Рис. 2.23

3) если $\beta^2 = \omega_0^2$, то частота затухающих колебаний $\omega = 0$. Этот режим работы называется *критическим*. Сопротивление контура $R_{\text{кр}}$, при котором наблюдается этот режим, также называется критическим

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.83)$$

Зависимость заряда на обкладках конденсатора от времени в критическом режиме изображена на рис. 2.24.

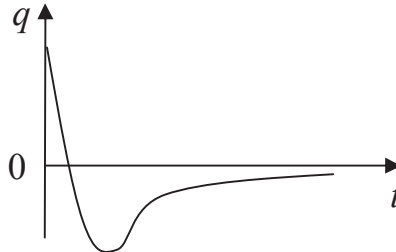


Рис. 2.24

2.8. Электромагнитные волны

2.8.1. Основные свойства электромагнитных волн. Волновое уравнение

Электромагнитной волной (ЭМВ) называется процесс распространения в пространстве с конечной скоростью переменного электрического поля и неразрывно связанного с ним переменного магнитного поля [4].

Существование ЭМВ вытекает из теории Максвелла, в основе которой лежат два постулата: 1) переменное магнитное поле порождает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле (явление электромагнитной индукции); 2) переменное электрическое поле, в свою очередь, порождает в окружающем пространстве вихревое магнитное поле.

За счет непрерывного взаимопревращения электромагнитное возмущение распространяется в пространстве. Этот процесс имеет волновой характер.

Теория Максвелла не только предсказала возможность существования электромагнитных волн, но и установила их *основные свойства*.

1. В электромагнитной волне (ЭМВ) векторы напряженности электрического поля \vec{E} и магнитной индукции \vec{B} совершают колебания в одинаковой фазе:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}), \quad \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad (2.84)$$

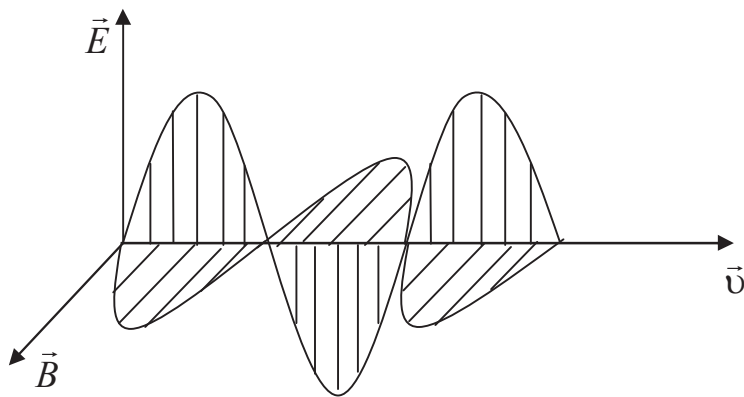


Рис. 2.25

В ЭМВ колебания векторов напряженности электрического поля \vec{E} и магнитной индукции \vec{B} происходят в плоскости, перпендикулярной скорости распространения волны: $\vec{E} \perp \vec{v}$, $\vec{B} \perp \vec{v}$. Поэтому ЭМВ — поперечная волна. Кроме того, векторы \vec{E} и \vec{B} взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов с вектором \vec{v} . Все сказанное можно видеть на рис. 2.25, который является «мгновенной фотографией ЭМВ» [4].

Уравнения (2.84) являются решениями волновых уравнений ЭМВ:

$$\begin{cases} \Delta \vec{B} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}, \\ \Delta \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2.85)$$

При записи уравнений (2.85) использовано обозначение оператора Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.86)$$

2. Электромагнитные волны могут распространяться и в веществе, и в вакууме. Скорость распространения ЭМВ зависит от электрических и магнитных свойств вещества [4].

Максимальна скорость распространения ЭМВ в вакууме — c , она равна скорости света в вакууме и связана с электрической (ϵ_0) и магнитной (μ_0) постоянными следующим соотношением:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (2.87)$$

В веществе скорость ЭМВ меньше, чем в вакууме:

$$v = \frac{c}{n}, \quad (2.88)$$

где $n = \sqrt{\epsilon \mu}$ — абсолютный показатель преломления данного вещества, зависящий от относительной диэлектрической ϵ и относительной магнитной проницаемости μ вещества. Таким образом, скорость ЭМВ в веществе равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}}. \quad (2.89)$$

3. Электромагнитные волны материальны. Распространяясь в пространстве, они обладают массой, импульсом, производят давление на поверхность, на которую они падают [4].

4. Объемные плотности энергии электрического $w_{\text{эл}}$ и магнитного $w_{\text{м}}$ полей ЭМВ одинаковы в любой момент времени:

$$w_{\text{эл}} = w_{\text{м}}, \quad (2.90)$$

где $w_{\text{эл}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$; $w_{\text{м}} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$.

2.8.2. Объемная плотность энергии ЭМВ. Поток энергии. Вектор Умова – Пойтинга

Объемную плотность энергии ЭМВ w можно найти как сумму объемной плотности энергии электрического поля $w_{\text{эл}}$ и объемной плотности энергии магнитного поля $w_{\text{м}}$:

$$w = w_{\text{эл}} + w_{\text{м}} = 2w_{\text{эл}}. \quad (2.91)$$

Учитывая равенство (2.90) для объемных плотностей энергии, можно показать, что

$$E = \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}, \quad (2.92)$$

тогда выражение (2.92) можно переписать в виде

$$w = 2w_{\text{эл}} = 2 \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} \cdot \frac{B}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} EB. \quad (2.93)$$

Перенос энергии электромагнитной волной характеризуется двумя величинами — потоком энергии и плотностью потока энергии.

Поток энергии Φ численно равен энергии, переносимой электромагнитной волной через некоторую поверхность s в единицу времени (рис. 2.26)

$$\Phi = \frac{dW}{dt} = \frac{ws \upsilon dt}{dt} = ws \upsilon. \quad (2.94)$$

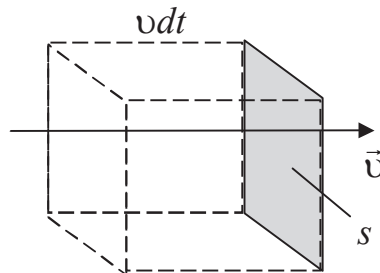


Рис. 2.26

Плотность потока энергии $\vec{\Pi}$ — это векторная величина, численно равная энергии, переносимой через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени [4].

$$|\vec{\Pi}| = \frac{dW}{dtS} = wv, \quad \vec{\Pi} = w\vec{v}. \quad (2.95)$$

Вектор плотности потока энергии называют еще вектором Пойнтинга, или *вектором Умова — Пойнтинга*. Вектор Умова — Пойнтинга можно представить и в таком виде:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu\mu_0} [\vec{E} \times \vec{B}]. \quad (2.96)$$

2.8.3. Поведение ЭМВ на границе раздела двух сред

На границе раздела двух сред с различными абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 происходит отражение и преломление электромагнитной волны. При этом выполняются следующие законы [4]:

- падающий, отраженный и преломленный лучи, а также перпендикуляр к границе раздела сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости;
- угол отражения β равен углу падения α (рис. 2.27);

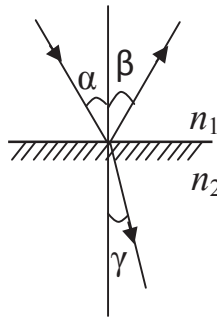


Рис. 2.27

- отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления γ (рис. 2.27) равно отношению абсолютного показателя преломления второй среды n_2 к абсолютному показателю преломления первой среды n_1 :

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (2.97)$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой.

Отметим, что при переходе ЭМВ из одной среды в другую изменяются ее длина λ волны и скорость v , а период T волны и ее частота ν не изменяются

$$\lambda = \lambda_0/n, \quad v = c/n, \quad n = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{\epsilon}, \quad (2.98)$$

где абсолютный показатель преломления среды n зависит от ϵ и μ , так как для многих сред $\mu = 1$ остается зависимость только от ϵ .

При отражении плоской ЭМВ от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) происходит изменение фазы колебаний вектора \vec{E} на π (векторы \vec{E} и $\vec{E}_{\text{отр}}$ направлены в противоположные стороны). При этом изменение фазы вектора \vec{B} не происходит (векторы \vec{B} и $\vec{B}_{\text{отр}}$ направлены в противоположные стороны, рис. 2.28, а). При отражении от оптически менее плотной среды ($n_2 < n_1$) изменение фазы колебаний вектора \vec{E} не происходит, а фаза вектора \vec{B} изменяется на π (рис. 2.28, б) [3].

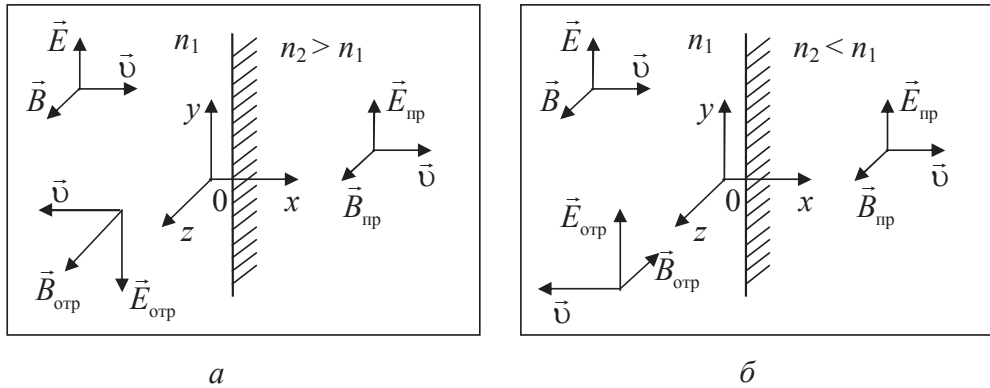


Рис. 2.28

Это означает, что при отражении падающей на границу раздела двух сред плоской электромагнитной волны тройка векторов \vec{E} , \vec{B} и \vec{v} поворачивается на угол 180° либо вокруг вектора \vec{B} ($n_2 > n_1$, рис. 2.28, а), либо вокруг вектора \vec{E} ($n_2 < n_1$, рис. 2.28, б).

3. Волновая оптика

В этом разделе рассматриваются ЭМВ видимого диапазона излучения ($\lambda = (400 \div 780)$ нм; $\omega = (2,42 \div 4,71) \cdot 10^{15}$ рад/с). Такие волны испускаются при переходах электронов между уровнями энергий в молекулах и атомах, при тепловых и электрических воздействиях на них.

В этом диапазоне излучения глаз человека различает такие основные цвета, как фиолетовый, синий, голубой, зеленый, желтый, оранжевый, красный. Любой цвет можно получить сложением трех независимых цветов, в качестве которых можно взять, например, синий, красный и зеленый. Если сложить все волны видимого диапазона излучения, то тогда получится излучение, которое называют *белым светом* [5].

Из двух характеристик ЭМВ здесь, в основном, рассматривается вектор напряженности \vec{E} электрического поля ЭМВ, который называют *световым вектором*. Как оказывается, он в основном воздействует на глаз человека, вызывая световые ощущения.

3.1. Интерференция света

Интерференция света — это такое наложение световых волн, при котором колебания, обусловленные волнами, в одних точках пространства усиливают друг друга, а в других ослабляют, в результате чего имеет место пространственное перераспределение интенсивности результирующей волны.

Интерферировать могут только *когерентные волны*. Волны называются когерентными, если их частоты одинаковы, а разность фаз с течением времени не изменяется. Кроме того, для наблюдения интерференционной картины необходимо, чтобы колебания световых векторов \vec{E} , интерферирующих волн совершались вдоль одного или близких направлений.

Любые два независимых источника света излучают некогерентные световые волны. Для получения когерентных волн свет от одного источника делят тем или иным способом на две части примерно рав-

ной интенсивности. Рассмотрим некоторые способы получения когерентных световых волн.

1. Щели Юнга

Две узкие (десятые доли мм) параллельные друг другу щели S_1 и S_2 , вырезанные в непрозрачном экране, освещаются светом, прошедшим через столь же узкую щель S , равноотстоящую от S_1 и S_2 (рис. 3.1). Щели S_1 и S_2 являются источниками вторичных когерентных волн. Накладываясь друг на друга в точке A на экране Θ , волны интерферируют.

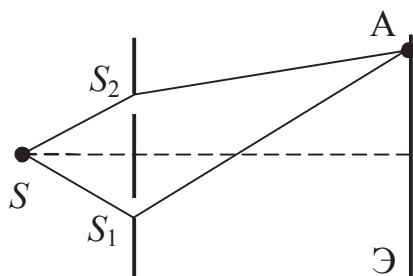


Рис. 3.1

2. Зеркала Френеля

Как видно из рис. 3.2, световая волна одновременно падает на два зеркала, расположенных под углом $\alpha \approx 180^\circ$, отражается от них и интерферирует в точке A на экране.

Когерентные части волны распространяются так, как будто бы они испускаются двумя разными источниками S_1 и S_2 .

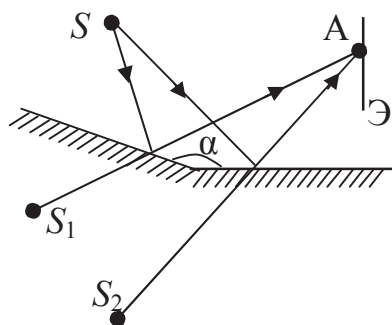


Рис. 3.2

3. Тонкая прозрачная пленка

Когерентные волны 1 и 2 возникают из одного падающего луча Π при отражении волны от нижней и верхней поверхностей пленки (рис. 3.3).

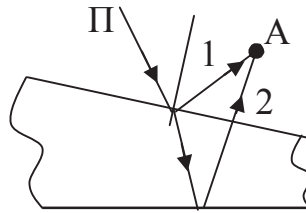


Рис. 3.3

3.1.1. Оптическая разность хода. Условия максимального усиления и ослабления света при интерференции

Скорость света зависит от свойств среды. Скорость света в вакууме равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а скорость v света в среде равна $v = \frac{c}{n}$, где n — абсолютный показатель преломления среды ($n > 1$). При переходе световой волны из одной среды в другую изменяется длина волны. Действительно, т.к. частота световой волны не изменяется, $\nu = \frac{v}{\lambda_{\text{ср}}} = \text{const}$, а скорости света v в разных средах различны, то и длины волн $\lambda_{\text{ср}}$ разные. Для света данной частоты в вакууме длина волны λ максимальна:

$$\frac{c}{v} = n = \frac{\lambda}{\lambda_{\text{ср}}}, \quad \lambda = n\lambda_{\text{ср}}.$$

Произведение геометрической длины пути S , пройденного световой волной в данной однородной среде, на абсолютный показатель преломления этой среды называется *оптической длиной пути* L :

$$L = S \cdot n.$$

Разность оптических путей двух когерентных волн называется *оптической разностью хода* Δ этих волн:

$$\Delta = L_2 - L_1 = n_2 S_2 - n_1 S_1.$$

Оптическая разность хода — величина алгебраическая: она может быть положительной или отрицательной.

Рассмотрим интерференцию двух световых волн

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t - k_1 S_1 + \varphi_{01}) \text{ и } E_2 = E_{02} \cos(\omega t - k_2 S_2 + \varphi_{02}),$$

распространяющихся в разных средах от источников 1 и 2, для случая $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ (рис. 3.4).

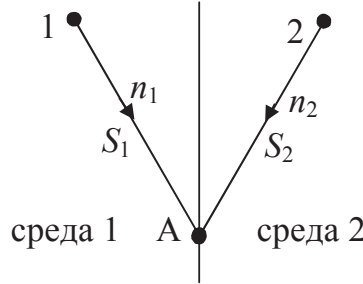


Рис. 3.4

Квадрат результирующей амплитуды при сложении колебаний, направленных вдоль одной прямой, определяется выражением

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (3.1)$$

где $\varphi_2 - \varphi_1 = k_1 S_1 - k_2 S_2$. Так как $k = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср}}}$ и $\lambda_{\text{ср}} = \frac{\lambda}{n}$, то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср1}}} S_1 - \frac{2\pi}{\lambda_{\text{ср2}}} S_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (S_1 n_1 - S_2 n_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta. \quad (3.2)$$

Из выражения (3.1) следует, что максимальное усиление волн будет наблюдаться тогда, когда $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$, т.е. $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi m$, где m — целое число. Следовательно, при максимальном усилении волн: $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = 2\pi m$ или

$$\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}. \quad (3.3)$$

Оптическая разность хода Δ равна четному числу полуволен — *условие максимума интенсивности*.

Наибольшее ослабление интерферирующих световых волн наблюдается (см. выражение (3.1)) при $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, т.е. $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2m + 1)$.

Следовательно, при максимальном ослаблении волн $\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pi(2m + 1)$ или

$$\Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}. \quad (3.4)$$

Оптическая разность хода волн Δ равна нечетному числу полу-волн — *условие минимума интенсивности*.

3.1.2. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников света (опыт Юнга)

Схема опыта Юнга и интерференционная картина в виде светлых и темных полос на экране представлены на рис. 3.5.

Пусть 1 и 2 — когерентные (щелевые) источники света, расположенные на расстоянии d друг от друга, экран Э расположен параллельно d на расстоянии l ($l \gg d$). Световые волны от 1 и 2, накладываясь в точке А экрана друг на друга, интерферируют, окрашивая экран прямолинейными полосами (светлыми и темными). По теореме Пифагора выразим квадраты оптических путей световых лучей, учитывая, что оба луча распространяются в воздухе ($n = 1$):

$$S_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 \quad \text{и} \quad S_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2.$$

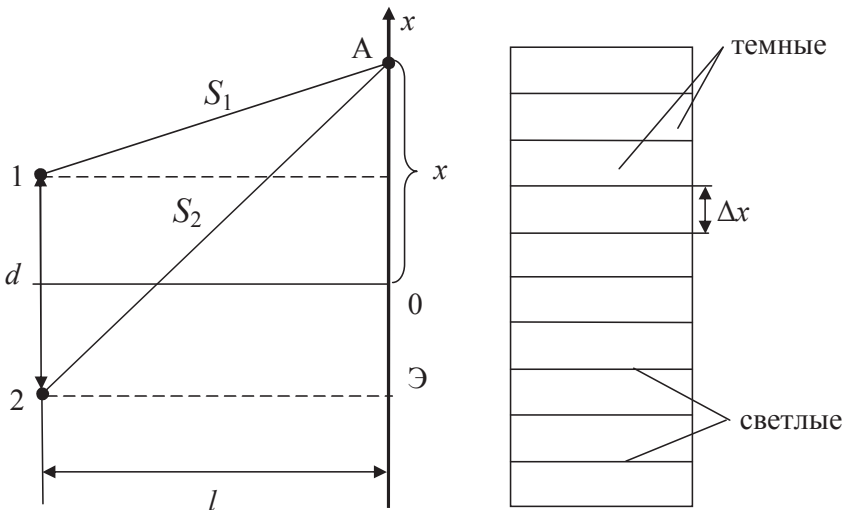


Рис. 3.5

Вычитая из первого второе равенство и учитывая, что $S_2^2 - S_1^2 = (S_2 - S_1) \cdot (S_2 + S_1)$, имеем: $(S_2 - S_1) \cdot (S_2 + S_1) = 2xd$, где $S_2 - S_1 = \Delta$ — оптическая разность хода двух лучей. Опыт показывает, что четкая интерференционная картина наблюдается только вблизи центра экрана, т.е. при $x \ll l$, поэтому $S_2 + S_1 \approx 2l$. Тогда для оптической разности хода лучей 1 и 2 получаем

$$\Delta = \frac{xd}{l}. \quad (3.5)$$

Приравнявая выражение (3.5) для разности хода к условиям (3.3) максимума и (3.4) минимума получим координаты *светлых* x_{\max} и *темных* x_{\min} полос:

$$\frac{x_{\max} \cdot d}{l} = 2m \frac{\lambda}{2}, \quad x_{\max} = 2m \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{l}{d}, \quad (3.6)$$

$$\frac{x_{\min} \cdot d}{l} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad x_{\min} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{l}{d}, \quad (3.7)$$

где $m = 0, 1, 2 \dots$

Видно, что в центре картины располагается максимум (при $m = 0$, $x_{\max} = 0$). Шириной интерференционной полосы Δx называется расстояние между соседними минимумами (или максимумами) интенсивности. Светлые и темные интерференционные полосы имеют *одинаковую ширину*, равную

$$\Delta x = \left[2(m + 1) + 1 \right] \frac{\lambda l}{2d} - (2m + 1) \frac{\lambda l}{2d} = \frac{\lambda l}{d}. \quad (3.8)$$

Для немонохроматического света ($\lambda \neq \text{const}$) полосы на экране цветные.

3.1.3. Интерференция в тонких пленках

Пусть на тонкую оптически однородную прозрачную пленку толщиной d и показателем преломления n , находящуюся в вакууме ($n = 1$), падает под углом α монохроматическая световая волна П (см. рис. 3.6). Достигнув поверхности пленки в точке А, волна частично отразится (луч 1), частично преломится под углом β и, достигнув нижней по-

верхности пленки в точке B , частично отразится, частично преломится и выйдет из пленки (луч 3). В точке C волна вновь делится: преломляется и выходит в вакуум (луч 2), отражается и, достигнув точки F , преломляется и покидает пленку (луч 4).

Волны 1, 2, 3, 4 образуются из одного падающего луча Π и являются когерентными. Лучи 1 и 2 называют отраженным светом, лучи 3 и 4 — проходящим светом [6].

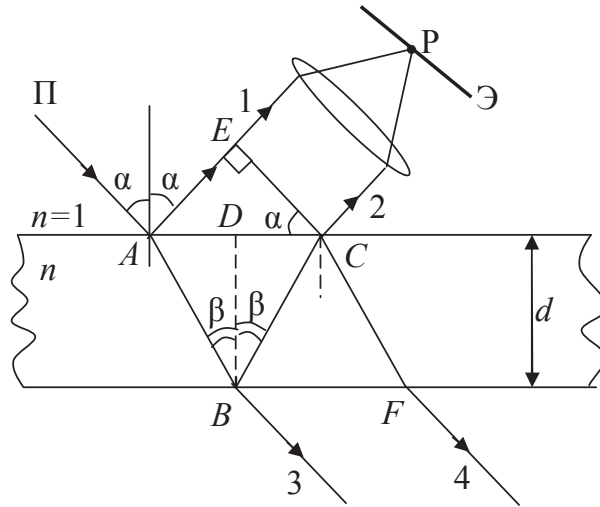


Рис. 3.6

Найдем условия образования интерференционных максимумов и минимумов для отраженного света. Поставив на пути лучей 1 и 2 собирающую линзу, получим на экране \mathcal{E} в точке P результат их интерференции, зависящий от оптической разности хода волн 1 и 2. Для того чтобы определить Δ , опустим перпендикуляр CE на прямую AE . От плоскости CE до точки P лучи 1 и 2 проходят одинаковые оптические пути.

Оптическая разность хода Δ возникает на участке от точки A до плоскости EC . Луч 2 проходит оптический путь $(AB+BC)n$, в то время как луч 1 проходит в вакууме путь AE .

Кроме того, при отражении световой волны от оптически более плотной среды (показатель преломления n имеет большее значение) вектор \vec{E} напряженности светового луча изменяет свою фазу на π , что эквивалентно тому, как если бы оптический путь изменился на $\lambda/2$ — половину длины волны. (Скачок фазы на π в оптике трактуется как потеря полуволны) [6].

В рассматриваемом случае это происходит при отражении падающего луча в точке A (в точке B отражение происходит от оптически менее плотной среды и вектор \vec{E} не изменяет свою фазу).

Таким образом,

$$\Delta = (AB + BC)n - AE \cdot 1 + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.9)$$

Из геометрических соображений имеем $AB = BC = \frac{\alpha}{\cos \beta}$, $AC = 2AD = 2d \cdot \operatorname{tg} \beta$, $\sin \alpha = \frac{AE}{AC}$ и $AE = 2d \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \sin \alpha$ и, учитывая закон преломления света $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$, из формулы (3.9) получим для оптической разности хода выражение [6]:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2} = 2dn \cos \beta + \frac{\lambda}{2}. \quad (3.10)$$

Световые волны 1 и 2 усиливают друг друга, если $\Delta = 2m \frac{\lambda}{2}$ или

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2dn \cos \beta = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (3.11)$$

Световые волны 1 и 2 ослабляют друг друга, если $\Delta = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$ или

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = 2dn \cos \beta = 2m \frac{\lambda}{2}. \quad (3.12)$$

Для проходящего света (лучи 3 и 4) условия максимума соответствуют условиям минимума (3.12) для отраженного света, а условия минимума — условиям максимума (3.11) для отраженного света.

3.1.4. Полосы равной толщины (клин, кольца Ньютона) и полосы равного наклона

1. *Клин.* Пусть на тонкую пленку (см. рис. 3.7) с непараллельными гранями (угол между ними достаточно мал) падает плоская волна (лучи 1 и 2). Рассмотрим лучи ($1'$ и $1''$, $2'$ и $2''$), получающиеся при отражении

от верхней и нижней поверхностей пленки (от клина). При определенном положении клина K и линзы L лучи $1'$ и $1''$ пересекаются в точке A , являющейся изображением точки B . Результат интерференции лучей $1'$ и $1''$ зависит от толщины клина d , а результат интерференции в точке A' лучей $2'$ и $2''$ — от толщины клина d'). На экране \mathcal{E} от многих падающих лучей возникает система интерференционных полос, соответствующих максимумам и минимумам интенсивности. Каждая из полос возникает за счет отражения от мест пленки, имеющих одинаковую толщину. Такие полосы получили название полос равной толщины. Полосы равной толщины локализованы вблизи поверхности клина (плоскость $B-B'$).

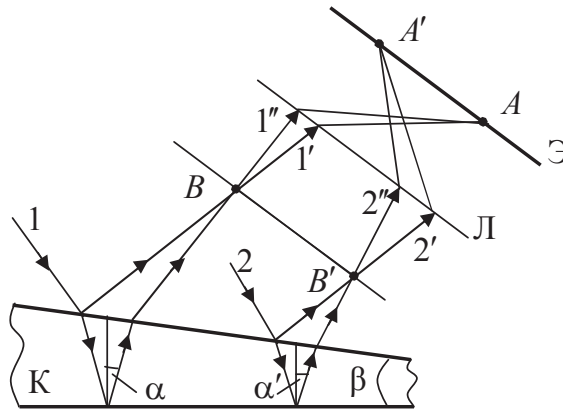


Рис. 3.7

Если же свет падает на пленку нормально, то полосы равной толщины локализуются на верхней поверхности клина. В случае интерференции на клине для оптической разности хода световых лучей справедлива формула (3.10), в которой надо учесть, что в разных местах клина толщина разная.

Если клин освещается белым светом, то интерференционные полосы будут окрашены.

2. Кольца Ньютона. Одним из характерных примеров полос равной толщины являются кольца Ньютона, наблюдающиеся при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной стеклянной пластинкой P и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой L с большим радиусом кривизны (см. рис. 3.8).

Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы L и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластинкой P .

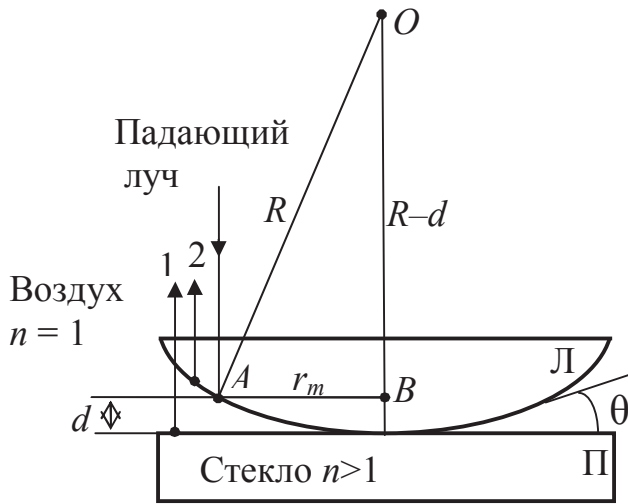


Рис. 3.8

При интерференции когерентных лучей 1 и 2 возникают полосы равной толщины, имеющие вид концентрических окружностей.

Кольца Ньютона получаются также и в случае, если пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено веществом (например, жидкостью). Если показатель преломления вещества клина меньше показателя преломления стеклянной пластинки, то «потеря» полуволны происходит при отражении луча от стеклянной пластинки.

Получим формулы для радиусов колец Ньютона. Пусть r_m — радиус кольца с номером m . Из $\triangle OAB$ $R^2 = r_m^2 + (R-d)^2$.

Так как $d \ll r_m$, то

$$2d = \frac{r_m^2}{R}. \quad (3.13)$$

Используя условия минимума (3.12) для отраженного света и учитывая, что $\alpha = \beta = 0$, имеем для темных колец

$$2dn = m\lambda. \quad (3.14)$$

Подставим выражение (3.14) в (3.13) и найдем радиусы темных колец

$$r_m = \sqrt{\frac{mR\lambda}{n}}, \quad (3.15)$$

где n — показатель преломления вещества клина (для воздушного слоя $n = 1$).

Радиусы светлых колец (с учетом формул (3.13) и (3.11)) в общем случае рассчитываются по формуле

$$r_m = \sqrt{\frac{(2m-1)R\lambda}{2n}}. \quad (3.16)$$

3. Полосы равного наклона. Интерференционная картина, возникающая при отражении рассеянного монохроматического света от тонкой прозрачной пленки постоянной толщины и представляющая собой чередующиеся светлые и темные эллиптические полосы, образуемые лучами, падающими на пленку под одним и тем же углом, называется полосами равного наклона.

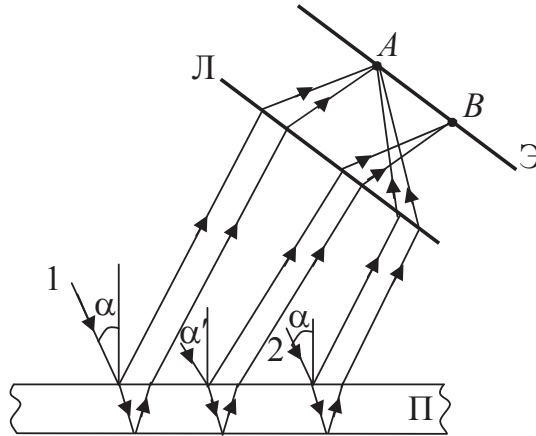


Рис. 3.9

В пучке рассеянного света имеются лучи всевозможных направлений (рис. 3.9). Лучи 1 и 2, лежащие в одной плоскости и падающие на пленку П под одним и тем же углом α , сфокусируются линзой Л в одной и той же точке А, лежащей в фокальной плоскости линзы (на экране Э). Лучи, падающие под тем же углом α , но лежащие в другой плоскости, соберутся в другой точке фокальной плоскости. Лучи, падающие на пленку под другим углом α' , соберутся в других точках. Таким образом, на экране возникнут светлые и темные полосы (кривые), соответствующие максимумам и минимумам интенсивностей света, падающего под определенным углом на пленку.

Если плоскопараллельную пластинку осветить белым светом, то интерференционная картина приобретает радужную (цветную) окраску, т. к. длины волн разных цветов различны.

3.1.5. Практическое применение интерференции света

Рассматривая различные интерференционные картины и применяя известные условия максимумов (или минимумов), можно с высокой степенью точности определять длины волн λ , расстояния S_i , проходимые световой волной в разных средах, показатели преломления n_i сред и т. д.

Используя полосы равной толщины, можно судить о качестве изготовления клиновых деталей, измерять малые углы θ и диаметры тончайших проволок. В технике широко применяются специальные оптические приборы, называемые интерферометрами, действие которых основано на исследовании интерференционных явлений.

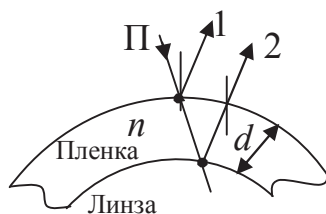


Рис. 3.10

1. Просветление оптики. Современные оптические приборы содержат много различных линз. Свет, проходя через них, многократно отражается. Интенсивность прошедшего света ослабляется, светосила оптического прибора уменьшается, что приводит к снижению эффективности его использования. С другой стороны, отражение света от наружных поверхностей линз приводит к возникновению бликов, что (например, в военном деле) демаскирует положение наблюдателей. Для устранения указанных недостатков на поверхности линз наносят тонкие пленки с малым коэффициентом отражения и показателем преломления меньшим, чем у материала линзы ($n_{пл} < n_{л}$) (рис. 3.10). Световые волны, отраженные от внешней и внутренней поверхностей пленки, интерферируют. Эти волны погасят друг друга, если их амплитуды одинаковы, а фазы отличаются на π .

При нормальном падении света на поверхность пленки $\Delta = 2dn$, т. к. обе волны 1 и 2 отражаются от оптически более плотных сред. При-

равнивая оптическую разность хода к условию минимума, находим минимальную толщину пленки (при $m = 0$), при которой отраженные от пленки световые волны гасят друг друга

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n}, \quad (3.17)$$

где n — показатель преломления пленки.

Так как белый свет содержит разные длины волн и добиться одновременного гашения всех длин волн невозможно, то обычно гасят наиболее восприимчивую для глаз зеленую волну с $\lambda_0 = 555$ нм. Именно поэтому объективы современных фотоаппаратов с просветленной оптикой кажутся голубовато—красными.

2. Определение качества обработки поверхностей. На исследуемую поверхность кладут плоскопараллельную пластинку так, чтобы создать воздушный зазор между поверхностью и пластинкой (рис. 3.11).

Перемещая по поверхности пластинку, можно обнаружить дефекты по искажению картины интерференции (царапины, шероховатость), а именно, в месте нахождения дефекта правильная картина чередования светлых и темных полос будет искажена [5].

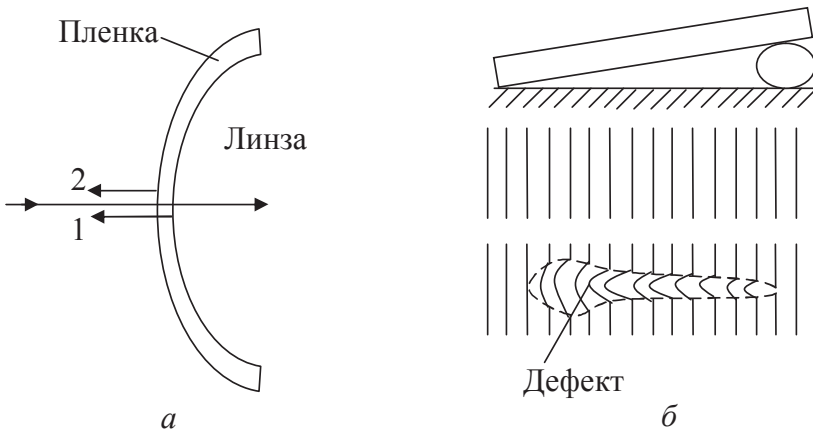


Рис. 3.11

3.2. Дифракция

Дифракция света — это огибание световыми волнами препятствий и проникновение их в область геометрической тени. Дифракция всег-

да сопровождается интерференционным перераспределением энергии волны. Следовательно, *между явлениями интерференции и дифракции нет принципиального различия*: если рассматривают сложение малого числа когерентных волн — это будет интерференция, если большого числа волн — дифракция [5]. Наиболее четко дифракция наблюдается тогда, когда длина волны соизмерима с размерами препятствий.

3.2.1. Принцип Гюйгенса — Френеля. Метод зон Френеля

Явление дифракции объясняется с помощью *принципа Гюйгенса — Френеля*, согласно которому каждая точка волнового фронта является центром вторичных когерентных волн (в однородной изотропной среде эти волны являются сферическими), а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени.

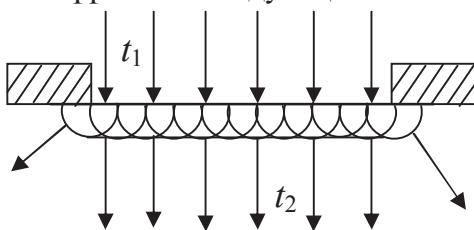


Рис. 3.12

Учет амплитуд и фаз вторичных световых волн позволяет найти амплитуду результирующей волны в любой точке пространства.

Покажем, как можно объяснить явление дифракции на основе принципа Гюйгенса — Френеля. Пусть на преграду, в которой имеется щель, падает плоская волна (рис. 3.12). В момент времени t_1 фронт волны занимает положение в этой щели. Каждая точка фронта волны является источником вторичных сферических волн, которые за время dt проходят расстояние $R = c \cdot dt$. Положение фронта волны в момент времени $t_2 = t_1 + dt$ можно найти как огибающую фронтов вторичных волн. Поскольку скорость волны в каждой точке волнового фронта перпендикулярна к нему, то имеются участки фронта волны, которые обеспечивают проникновение света в область геометрической тени (см. рис. 3.11). Если размеры этих участков фронта волны будут соизмеримы с размерами щели, то явление дифракции света бу-

дет наблюдаться; если же они будут существенно меньше размеров щели, то явление дифракции хотя и будет существовать, но оно будет незаметным по сравнению с интенсивностью света, проходящего щель в соответствии с законами геометрической оптики [5].

Применим принцип Гюйгенса — Френеля для нахождения амплитуды светового колебания, возбуждаемого в точке P сферической волной, распространяющейся в однородной среде из точечного источника S (рис. 3.13).

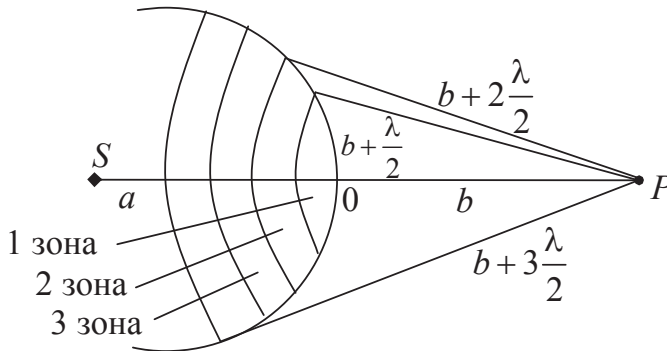


Рис. 3.13

Пусть $a = OS$ — расстояние от источника света до волнового фронта, а $b = OP$ — расстояние от фронта волны до точки наблюдения. Френель разбил фронт волны на кольцевые зоны (зоны Френеля), построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\frac{\lambda}{2}$ (λ — длина световой волны в той среде, в которой распространяется волна).

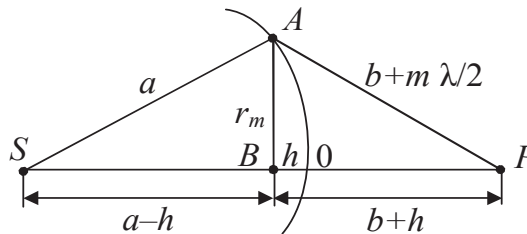


Рис. 3.14

Из геометрических рассуждений и рассмотрения $\triangle SAB$ и $\triangle ABP$ (рис. 3.14) можно получить выражение для радиуса зоны Френеля с номером m :

$$r_m = \sqrt{\frac{abm\lambda}{a+b}}. \quad (3.18)$$

Если волна плоская ($a \rightarrow \infty$), то

$$r_m = \sqrt{\frac{bm\lambda}{1 + \frac{b}{a}}} = \sqrt{bm\lambda}. \quad (3.19)$$

Расчеты показывают, что площади зон Френеля примерно одинаковы. Однако, чем больше номер зоны Френеля, тем дальше она отстоит от точки наблюдения и тем меньше ее угловой размер, под которым эта зона видна из точки наблюдения. Это приводит к тому, что с увеличением номера зоны амплитуда A_m колебания, возбуждаемого в точке P , уменьшается. Таким образом, амплитуды колебаний, возбуждаемых в точке P зонами Френеля, образуют монотонно убывающую последовательность

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots A_{m-1} > A_m > A_{m+1} > \dots$$

Кроме того, амплитуда световой волны, приходящей в точку наблюдения от зоны с номером m , может быть выражена в виде

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Волны, приходящие в точку наблюдения от соседних зон Френеля, имеют оптическую разность хода $\lambda/2$ или разность фаз, равную π . Поэтому амплитуда результирующего светового колебания в точке P может быть найдена алгебраически:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots, \text{ или}$$

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \frac{A_5}{2} - \dots = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_N}{2}.$$

При значении номера зоны $N \rightarrow \infty$ вкладом зоны Френеля с номером N можно пренебречь по сравнению с вкладом от первой зоны Френеля ($A_N \ll A_1$).

Таким образом, при полностью открытом волновом фронте амплитуда световой волны в точке P равна половине амплитуды, создаваемой лишь одной первой (центральной) зоной Френеля.

$$A = \frac{A_1}{2}. \quad (3.20)$$

Действие всей волновой поверхности эквивалентно действию половины центральной зоны. Так как центральная зона имеет размеры долей миллиметра ($\lambda \ll b$), то свет от источника S к точке P распространяется как бы в узком прямом канале, т. е. прямолинейно.

Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытым только одну центральную зону Френеля, то амплитуда колебаний в точке P будет равна A_1 , т. е. в два раза больше, а интенсивность света — в четыре раза больше, чем при отсутствии экрана.

Еще большего усиления света можно достичь с помощью так называемой *зонной пластинки* — экрана, перекрывающего либо все четные, либо все нечетные зоны Френеля.

3.2.2. Дифракция Френеля на диске и на круглом отверстии

Пусть сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника S , встречает на своем пути диск, перекрывающий m зон Френеля (рис. 3.15, а).

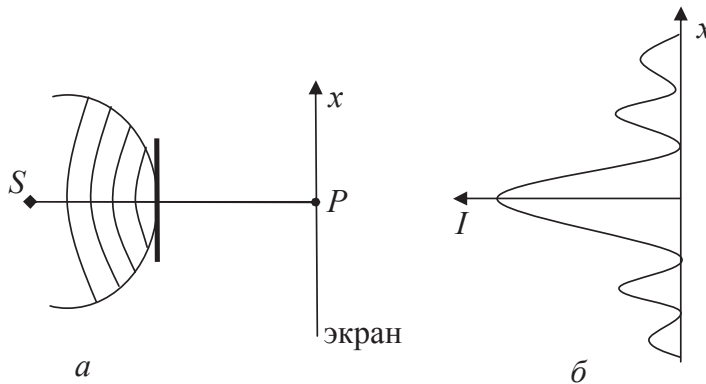


Рис. 3.15

Тогда амплитуда результирующего колебания в точке P равна

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2},$$

следовательно, в точке P всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими темными и светлыми кольцами, возникающими на границе геометрической тени. Распределение интенсивности света на экране в этом случае изображено на рис. 3.15, б. Если экран перекрывает много зон Френеля, то $\frac{A_{m+1}}{2} \rightarrow 0$ и $I \rightarrow 0$. Если же экран закрывает лишь часть центральной зоны Френеля, то интенсивность света I на экране остается практически одинаковой.

Пусть сферическая волна падает на непрозрачный экран с круглым отверстием, в которое укладывается m зон Френеля (см. рис. 3.16, а).

Амплитуда световой волны в точке P :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m.$$

Так как амплитуды соседних зон мало отличаются по величине, то в результате получим

$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2}, \quad (3.21)$$

где $(+)$ соответствует нечетным m , а $(-)$ — четным m .

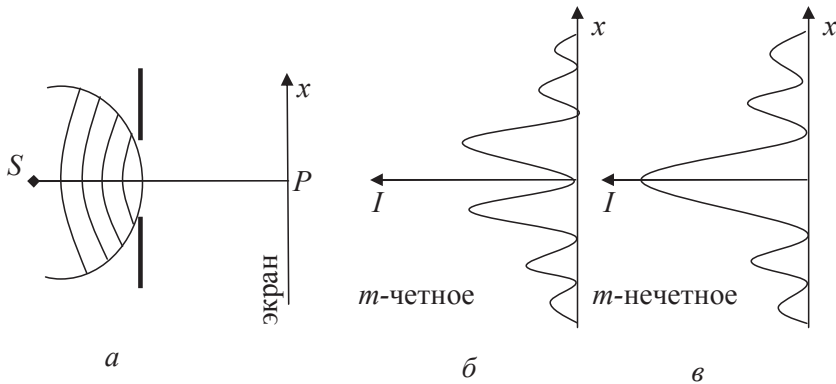


Рис. 3.16

При малых m $A_m \approx A_1$. Следовательно, при нечетных m амплитуда колебаний в точке P будет приблизительно равна $A \approx A_1$, при четных m $A \approx 0$.

Дифракционная картина от круглого отверстия представляет собой чередование светлых и темных концентрических колец на границе ге-

ометрической тени. В центре картины будет либо темное (m — четное, рис. 3.16, б), либо светлое (m — нечетное, рис. 3.16, в) пятно. Если отверстие открывает не более одной зоны Френеля, то дифракции не наблюдается (размытое светлое пятно).

3.2.3. Амплитудная и фазовая зонные пластинки

Метод зон Френеля позволяет достаточно просто предложить способы для получения значений амплитуды результирующей волны в точке наблюдения, превышающих значение $A_1 / 2$. Так, если закрыть непрозрачным экраном все зоны Френеля, кроме первой, то тогда можно увеличить амплитуду результирующей волны в два раза ($A_p = A_1$), а интенсивность — в четыре раза [5].

Для дальнейшего увеличения A_p можно на пути волны поставить амплитудную зонную пластинку, которая закрывает все четные зоны Френеля, что приводит к следующему результату:

$$A_p = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + \dots,$$

а максимальное увеличение амплитуды A_p можно получить с помощью фазовой зонной пластинки, которая изменяет фазу волн, идущих в точку наблюдения от четных зон Френеля, на значение, равное π

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 + \dots.$$

Амплитудные и фазовые зонные пластинки достаточно легко создать для электромагнитных волн в области сверхвысоких частот (СВЧ — диапазон). В этом случае размеры зон Френеля будут достаточно большими. Так, из формулы для радиусов зон Френеля (3.18) в случае СВЧ-диапазона ($\lambda_0 \approx 1$ см, $S_0 = 0$, $P = 1$ м) можно получить следующие оценки: $r_1 = 7$ см; $r_2 = 10$ см, и т. д. [5]

3.2.4. Дифракция в параллельных лучах на одной щели

Дифракция плоских волн (параллельные лучи) называется дифракцией Фраунгофера.

Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально на экран со щелью шириной a (длина щели $l \gg a$ и перпендикулярна к плоско-

сти чертежа). Когда фронт волны дойдет до щели и займет положение AB , то все его точки явятся источниками вторичных волн, распространяющихся во все стороны вперед от щели (рис. 3.17, a). Рассмотрим волны, распространяющиеся под углом φ к первоначальному направлению (этот угол называется углом дифракции).

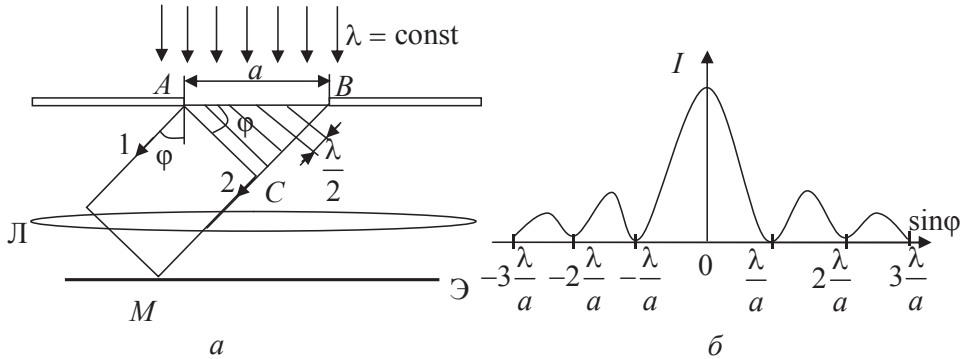


Рис. 3.17

Чтобы получить интерференционную картину, за щелью поместим собирающую линзу L с экраном \mathcal{E} , расположенным в ее фокальной плоскости. Оптическая разность хода между крайними лучами 1 и 2, идущими от щели в этом направлении, равна $BC = a \sin \varphi$ ($AC \perp BC$).

Мысленно разделим отрезок BC на ряд отрезков длиной $\frac{\lambda}{2}$. Число та-

ких отрезков $Z = \frac{BC}{\lambda/2} = \frac{a \sin \varphi}{\lambda/2}$.

Проводя из концов этих отрезков линии, параллельные AC , до встречи с AB , разобьем фронт волны AB на ряд полосок одинаковой ширины. Эти полоски и являются в данном случае зонами Френеля, поскольку соответственные точки этих полосок оказываются источниками волн, доходящих по данному направлению до точки M на экране, с разностью хода $\frac{\lambda}{2}$. Все точки фронта волны в плоскости

щели будут совершать колебания в одинаковой фазе. Амплитуды вторичных волн в плоскости щели будут равны, так как выбранные зоны Френеля имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения. Из построения следует, что волны, идущие от каждых соседних зон Френеля, приходят в точку M в противопо-

ложной фазе и гасят друг друга. Если при построении число зон Френеля окажется четным, т. е. $Z = 2m$ (m — целое число, называемое порядком максимума или минимума), то каждая пара соседних зон (1–2, 3–4, ...) взаимно погасят друг друга, и при данном угле дифракции φ на экране будет минимум освещенности.

Углы φ_{\min} , соответствующие этим минимальным освещенностям, находят из условия:

$$a \sin \varphi_{\min} = 2m \frac{\lambda}{2}. \quad (3.22)$$

В промежутках между минимумами будут наблюдаться максимумы при углах φ_{\max} , определяемых из условия:

$$a \sin \varphi_{\max} = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (3.23)$$

Для этих углов фронт AB разобьется на $Z = 2m + 1$ зон, и одна зона останется непогашенной. На экране будут наблюдаться максимумы и минимумы интенсивности. Ширина и число полос зависят от отношения $\frac{\lambda}{a}$.

На рис. 3.17, б приведена зависимость $I = I(\sin \varphi)$ интенсивности света на экране от синуса угла дифракции.

При освещении щели белым светом центральный максимум имеет вид белой полосы, тогда как боковые максимумы радужно окрашены. При этом максимумы более коротких волн (фиолетовых) располагаются в этих спектрах ближе к центру дифракционной картины.

3.2.5. Дифракция на одномерной дифракционной решетке

Совокупность одинаковых дифракционных элементов (отверстий или препятствий), расположенных регулярно, называется *дифракционной решеткой*.

Одномерная (линейная) дифракционная решетка представляет собой ряд параллельных щелей одинаковой ширины a , разделенных одинаковыми непрозрачными промежутками шириной b . Суммарное расстояние $a + b = d$ называется *периодом*, или *постоянной дифракционной решетки*.

Пусть на линейную дифракционную решетку нормально падает плоская монохроматическая волна (рис. 3.18). Интерференционная картина, наблюдаемая на экране, определяется не только условиями минимумов и максимумов при дифракции от одной щели, но и интерференцией лучей, идущих из соответственных точек разных щелей. С помощью линзы в одной точке на экране, расположенном в ее фокальной плоскости, собираются все параллельные лучи, испущенные каждой щелью дифракционной решетки.

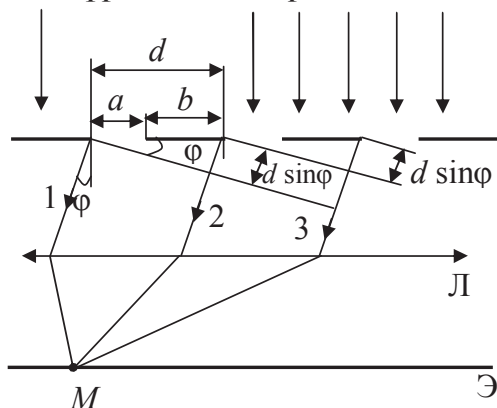


Рис. 3.18

Если угол дифракции φ такой, что в данном направлении каждая щель дает нулевую интенсивность, то такую же интенсивность в этом направлении дает и вся решетка в целом. Поэтому условие минимума для одной щели (3.22) применимо и для всей решетки.

Минимумы, наблюдаемые под углом, удовлетворяющим соотношению $a \cdot \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2}$, называются *главными минимумами* дифракционной решетки.

Оптическая разность хода между двумя лучами 2 и 1 (3 и 2 и др.), идущих из соответственных точек разных щелей (из начала, середины, конца щелей), как видно из построения, равна $\Delta = d \sin \varphi$. Если она удовлетворяет условию максимума при интерференции (3.3), то волны будут усиливать друг друга.

Выражение

$$d \sin \varphi = 2m \frac{\lambda}{2} \quad (3.24)$$

определяет *главные максимумы* дифракционной решетки, величина m ($m = 0, 1, 2, \dots$) называется порядком главного максимума. Число главных максимумов равно

$$n = 2m_{\max} + 1, \quad (3.25)$$

где m_{\max} — число главных максимумов всех порядков, наблюдаемых по одну сторону от центрального максимума ($m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda}$), слагаемое

«единица» учитывает сам центральный максимум.

При общем числе щелей N решетки между соседними главными максимумами располагаются $N-1$ добавочных минимумов и $N-2$ слабых по интенсивности добавочных максимумов. С увеличением числа щелей N главные максимумы становятся более острыми и интенсивными.

При падении на дифракционную решетку белого света все главные максимумы, кроме центрального максимума, будут разлагаться в спектр. Причем в спектре разных порядков фиолетовые линии будут располагаться ближе к центру картины, чем красные линии.

Действительно, при $m = 0$ для всех волн белого света из уравнения (3.24) следует, что угол дифракции φ равен нулю ($\varphi = 0^0$). Следовательно, все волны с разной длиной волны приходят в центр экрана и при сложении дают белую полосу. Для $m \neq 0$ ($m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) угол наблюдения максимумов одного порядка $\varphi = \arcsin(m\lambda_0/d)$ будет зависеть от длины волны, и так как $\lambda_\phi < \lambda_{\text{кр}}$, то и $\varphi_\phi < \varphi_{\text{кр}}$ в спектре любого порядка [5].

3.3. Поляризация света

3.3.1. Естественный и поляризованный свет. Виды поляризованного света

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Атомы же излучают световые волны независимо друг от друга. Поэтому световая волна, излучаемая телом, характеризуется всевозможными равновероятными направлениями колебания

вектора \vec{E} в плоскости, перпендикулярной к скорости распространения волны (рис. 3.19), причем модули векторов \vec{E} одинаковы. Такой свет называется *естественным*.

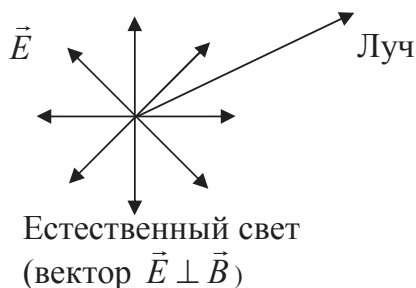


Рис. 3.19

Под *поляризацией света* понимают ту или иную степень упорядоченности колебаний светового вектора (вектора \vec{E}) электромагнитной волны в пространстве.

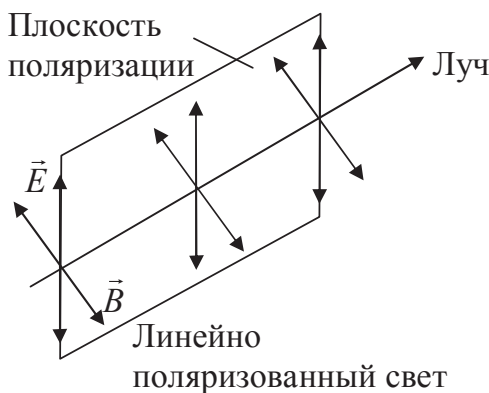


Рис. 3.20

Свет называется *линейно поляризованным (плоскополяризованным)*, если колебания электрического (светового) вектора \vec{E} происходят вдоль одного направления (рис. 3.20). Плоскость, проходящая через вектор \vec{E} и направление луча, называется плоскостью поляризации.

Свет, в котором в результате каких-либо внешних воздействий появляется преимущественное (но не единственное) направление колебаний вектора \vec{E} , называется *частично поляризованным*.

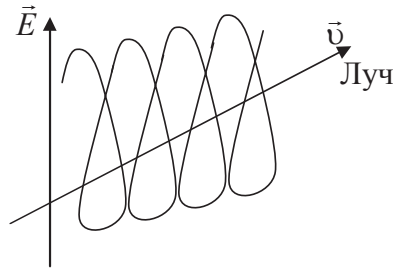


Рис. 3.21

При сложении двух световых волн одинаковой частоты, линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, результирующий вектор \vec{E} может поворачиваться по мере распространения волны (происходит сложение взаимно перпендикулярных колебаний одинаковой частоты). Свет, у которого конец вектора \vec{E} , вращаясь вдоль направления луча, описывает эллипс (см. рис. 3.21), называется *эллиптически поляризованным*, если окружность, то *поляризованным по кругу*.

3.3.2. Получение линейно поляризованного света. Закон Малюса

Поляроидами называют вещества, которые позволяют получить линейно поляризованный свет (ЛПС). Например, если взять пленки, изготовленные из длинных цепочек углеводородных молекул, то при падении на нее неполяризованного света (НПС), на выходе из пленки получают линейно поляризованный свет (рис. 3.22, а) [5].

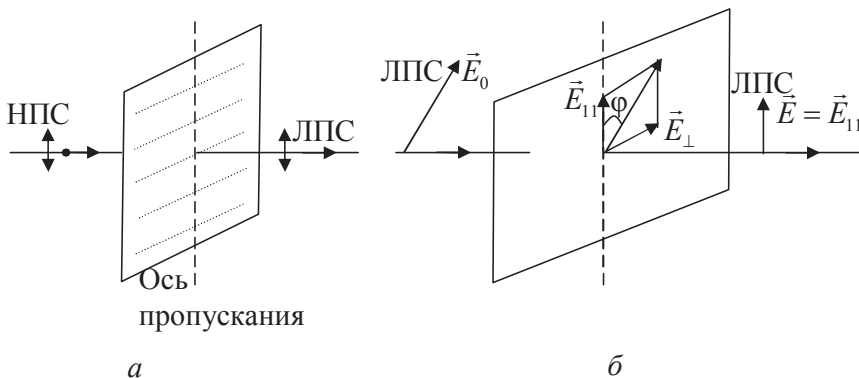


Рис. 3.22

Это объясняется тем, что составляющая вектора \vec{E} (\vec{E}_\perp), параллельная направлению, вдоль которого вытянуты эти молекулы, вызывает интенсивное движение электронов в молекулах и поэтому полностью поглощается поляроидом. Составляющая вектора \vec{E} (\vec{E}_\parallel), направленная перпендикулярно длине цепочек молекул (это направление называется осью пропускания поляроида), интенсивного движения электронов не вызывает, и эта составляющая проходит поляроид без изменения [5].

На выходе поляроида получается ЛПС, для которого вектор \vec{E} совершает колебания вдоль оси пропускания.

Если на поляроид направить ЛПС (см. рис. 3.22, б), то тогда интенсивность прошедшего через поляроид ЛПС ($I \sim E^2$) связана с интенсивностью падающего на него света ($I_0 \sim E_0^2$) формулой

$$E = E_0 \cos \varphi \Rightarrow I = I_0 \cos^2 \varphi. \quad (3.26)$$

Эта формула получила название *закона Малюса*. Она связывает интенсивности падающего и прошедшего поляроид линейно поляризованного света [5].

В случае падения на поляроид НПС необходимо в формуле (3.26) провести усреднение по всевозможным углам φ ($0 \leq \varphi \leq 180^\circ$) между направлением вектора \vec{E} падающей волны и осью пропускания поляроида [5], что дает

$$\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2 \Rightarrow I = I_0 / 2. \quad (3.27)$$

На рис. 3.22, а в этом случае на входе будет два вектора \vec{E} (стрелка и точка), а после прохождения поляроида будет только один вектор \vec{E} (стрелка).

3.3.3. Поляризация света при отражении. Закон Брюстера

Естественный свет при отражении от границы раздела двух диэлектриков поляризуется. Степень поляризации (отношение интенсивности поляризованной составляющей света к полной интенсивности света) и ее тип зависят от угла падения волн на поверхность и электрических свойств этой поверхности.

В отраженном луче (см. рис. 3.23, а) преобладают колебания, перпендикулярные к плоскости падения (они отмечены точками). В преломленном луче — колебания, параллельные плоскости падения (отмечены стрелками).

При угле падения i_B , удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}, \quad (3.28)$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой

($n_{21} = \frac{\sin i}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$), *отраженный луч 1 полностью линейно поляризован* в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения

(рис. 3.23, б), а преломленный луч поляризован максимально, но не полностью.

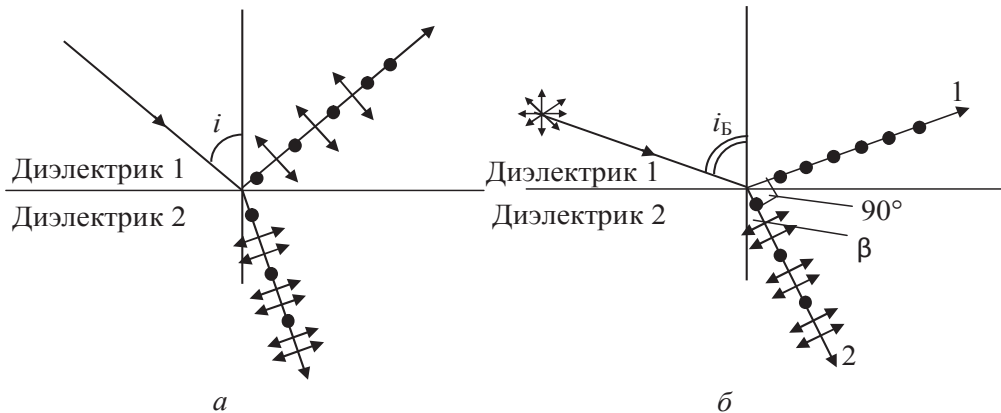


Рис. 3.23

При угле падения i_B , удовлетворяющем условию

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}, \quad (3.28)$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды относительно первой

($n_{21} = \frac{\sin i}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$), *отраженный луч 1 полностью линейно поляризован* в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения

(рис. 3.23, б), а преломленный луч поляризован максимально, но не полностью.

Угол i_B называется *углом Брюстера*, или углом полной поляризации, а зависимость (3.28) — *законом Брюстера*.

Легко показать, что при падении естественного света под углом Брюстера отраженный 1 и преломленный 2 лучи взаимно перпендикулярны, поэтому $i_B + \beta = 90^\circ$.

4. Квантовая оптика

В разделе «Волновая оптика» было наглядно показано, что свет обладает волновыми свойствами. Однако волновые свойства являются проявлением только одной стороны электромагнитного излучения. В этом разделе рассматривается другая, корпускулярная, сторона электромагнитного излучения и опытные факты и явления, подтверждающие ее.

4.1. Тепловое излучение

4.1.1. Характеристики, вводимые для описания параметров теплового излучения. Закон Кирхгофа

Под тепловым излучением понимают излучение ЭМВ телами за счет их внутренней энергии U , т.е. за счет теплового движения молекул и атомов. Такое излучение присуще всем телам, т.к. тепловое движение существует при всех температурах выше абсолютного нуля температур [4].

Тепловое излучение уже рассматривалось в волновой оптике, там оно называлось излучением естественного источника света. Поэтому можно отметить следующие его свойства — оно является немонохроматичным (присутствуют всевозможные частоты в спектре излучения) и неполяризованным.

Кроме того, в отличие от других видов излучения, *тепловое излучение является равновесным*, т.е. оно может находиться в равновесии с излучающим телом [4]. Это связано с тем, что интенсивность I теплового излучения зависит от температуры тела ($I = I(T)$), и поэтому любые отклонения от равновесного состояния между излучающим телом и излучением приводят к тому, что снова восстанавливается положение равновесия.

Действительно, пусть внутри тела имеется полость (см. рис. 4.1), заполненная тепловым излучением. Если, например, температура тела

внезапно увеличится, то тогда интенсивность излучения станет больше, что приведет к уменьшению внутренней энергии U тела, которая пропорциональна температуре ($U = U(T)$). Следовательно, температура тела станет меньше, интенсивность излучения понизится и снова наступит равновесие между телом и излучением в полости [4]: $\uparrow T \Rightarrow \uparrow I \Rightarrow \downarrow U \Rightarrow \downarrow T$. Равновесность теплового излучения позволяет изучать его закономерности с помощью законов равновесной термодинамики.

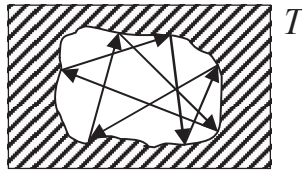


Рис. 4.1

Так, законы теплового излучения были установлены применением к этому излучению термодинамического подхода, в котором не рассматривается внутреннее строение систем, а выводы о поведении систем делаются на основе трех законов (начал) термодинамики.

Для описания теплового излучения вводятся такие понятия, как *энергетическая светимость* R_T и *спектральная плотность* $r_{\lambda,T}$ *энергетической светимости* (испускательная способность)

$$R_T = \frac{dW}{dSdt}, \quad r_{\lambda,T} = \frac{dR}{d\lambda}, \quad (4.1)$$

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T} d\lambda. \quad (4.2)$$

Как видно из формулы (4.1), *энергетическая светимость* R_T представляет собой энергию, излучаемую с единицы площади поверхности тела в единицу времени во всем интервале длин волн (или частот).

Спектральная плотность $r_{\lambda,T}$ *энергетической светимости* представляет собой энергию, излучаемую с единицы площади поверхности тела за единицу времени в единичном интервале длин волн.

Формула (4.2) устанавливает связь между энергетической светимостью и спектральной плотностью энергетической светимости.

В теоретических и экспериментальных исследованиях наряду с $r_{\lambda,T}$ применяется спектральная плотность энергетической светимости $r_{\nu,T}$, выраженная через частоту ν излучения

$$r_{\nu,T} = \frac{dR}{d\nu}. \quad (4.3)$$

Формула связи между ними запишется таким образом:

$$r_{\nu,T} = \frac{dR}{d\nu} = \frac{dR}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\nu} = -r_{\lambda,T} \frac{d(c/\nu)}{d\nu} = \frac{c}{\nu^2} r_{\lambda,T} \Rightarrow r_{\nu,T} = \frac{c}{\nu^2} r_{\lambda,T}. \quad (4.4)$$

При выводе формулы (4.4) было учтено, что для приращения $d\nu > 0$ приращение $d\lambda$ будет меньше нуля ($d\lambda < 0$).

Для описания способности тел поглощать электромагнитное излучение вводят *монохроматический коэффициент поглощения (поглощательную способность)* [4]

$$a_{\lambda,T} = \frac{dW_{\text{погл}}}{dW_{\text{пад}}}. \quad (4.5)$$

Он показывает, какая часть энергии $dW_{\text{пад}}$ падающего излучения с длинами волн в пределах от λ до $\lambda + d\lambda$ поглощается телом.

Как следует из формул (4.1) и (4.3), энергетическая светимость R_T и испускательная способность $r_{\lambda,T}$ являются размерными величинами ($[R_T] = \text{Вт/м}^2$, $[r_{\lambda,T}] = \text{Вт/м}^3$, $[r_{\nu,T}] = \text{Вт} \cdot \text{с/м}^3$), а поглощательная способность $a_{\lambda,T}$ — безразмерной величиной. Они зависят от температуры тела (R_T) и от длины волны (частоты) излучаемого (поглощаемого) теплового излучения ($r_{\lambda,T}$, $a_{\lambda,T}$).

По способности поглощать электромагнитное излучение удобно ввести две модели тел: 1) *абсолютно черное тело (а. ч. т.)* — тело, которое во всем интервале длин волн поглощает полностью падающее на него излучение ($a_{\lambda,T} = 1$); 2) *абсолютно серое тело (а. с. т.)* — тело, для которого поглощательная способность во всем интервале длин волн является постоянной величиной, меньшей единицы ($a_{\lambda,T} = \text{const} < 1$) [4].

Поглощательная и испускательная способность любого тела связаны между собой *законом Кирхгофа*, который был установлен в 1859 г. на основе применения законов термодинамики к тепловому излучению. Закон Кирхгофа относится только к равновесному тепловому излучению.

Согласно закону Кирхгофа *отношение испускательной способности тела к его поглощательной способности не зависит от природы тела и является универсальной функцией температуры тела и длины волны, которую называют универсальной функцией Кирхгофа или испускательной способностью абсолютно черного тела*

$$\left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} \right) = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} \right) = \dots = \left(\frac{r_{\lambda,T}}{a_{\lambda,T}} \right) = (r_{\lambda,T})_{\text{АЧТ}} = r_{\lambda,T}^0, \quad (4.6)$$

где $r_{\lambda,T}^0$ обозначает испускательную способность абсолютно черного тела.

Из закона Кирхгофа вытекают следующие выводы:

1) если на каком-то интервале длин волн тело сильно излучает, то на этом интервале длин волн оно и сильно поглощает. Действительно, если $(r_{\lambda,T})_1 > (r_{\lambda,T})_2$, то тогда из закона Кирхгофа (4.6) следует, что $(a_{\lambda,T})_1 = (a_{\lambda,T})_2$ $(r_{\lambda,T})_1 / (r_{\lambda,T})_2 > (a_{\lambda,T})_2$;

2) наиболее сильно при данной температуре во всем интервале длин волн излучает абсолютно черное тело. Действительно, из закона (4.6) получим: $r_{\lambda,T}^0 = (r_{\lambda,T} / a_{\lambda,T}) \geq (r_{\lambda,T})$, т. к. $(a_{\lambda,T}) \leq 1$;

3) для установления законов теплового излучения необходимо экспериментальное и теоретическое исследование испускательной способности абсолютно черного тела.

4.1.2. Модель абсолютно черного тела.

Экспериментальные законы теплового излучения а. ч. т.

Для экспериментального исследования испускательной способности абсолютно черного тела необходимо смоделировать а. ч. т. на опыте. На первый взгляд это оказывается достаточно сложным делом, так как любое реальное тело не может иметь поглощательную способность, равную единице, во всем интервале длин волн. Даже для черного бархата поглощательная способность отклоняется от единицы за пределами видимого диапазона излучения.

Но оказалось, что моделью а. ч. т. может считаться полость внутри тела, которая имеет малое входное отверстие (см. рис. 4.2).

Действительно, все излучение, попадающее в эту полость, практически не выходит наружу. Это связано с тем, что при многократных

отражениях от стенок полости энергия падающего излучения практически полностью поглощается внутри нее.

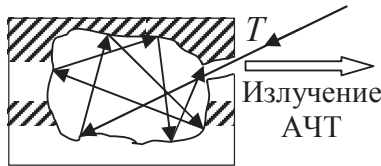


Рис. 4.2

Следовательно, поглощательная способность такой полости во всем интервале длин волн будет равна единице, и тогда выходящее из полости излучение и представляет собой излучение а. ч. т. [4]. Температура этого излучения будет равна температуре тела, внутри которого находится полость.

Такое излучение можно изучить с помощью спектральных приборов (например, дифракционной решетки) и построить график зависимости испускательной способности $r_{\lambda,T}^0$ а. ч. т. от длины волны. Эти графики приведены на рис. 4.3, а.

Как видно из рис. 4.3, а, график зависимости $r_{\lambda,T}^0$ от длины волны λ имеет максимум, зависящий от температуры тела, кривая $r_{\lambda,T}^0$ плавно спадает в области больших длин волн и практически равна нулю в области рентгеновского излучения. С повышением температуры интенсивность излучения возрастает, максимум $r_{\lambda,T}^0$ увеличивается и смещается в область малых длин волн [4].

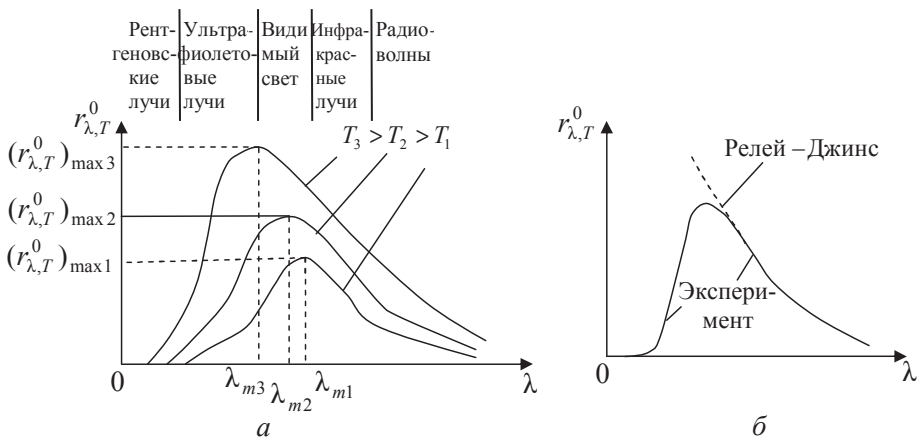


Рис. 4.3

Полученные экспериментально графики для испускательной способности а. ч. т. при разных температурах излучающего тела позволили сформулировать опытные законы теплового излучения.

1. *Закон Стефана—Больцмана.* Можно экспериментально показать, что площадь под графиком испускательной способности $r_{\lambda,T}^0$ а. ч. т. прямо пропорциональна четвертой степени температуры а. ч. т. [4]. Учитывая, что согласно формуле (4.2) площадь под графиком $r_{\lambda,T}^0$ определяет энергетическую светимость R_T^0 тела, сформулируем закон Стефана — Больцмана: *энергетическая светимость абсолютно черного тела прямо пропорциональна четвертой степени его температуры.*

$$R_T^0 = \sigma T^4, \quad (4.7)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — *постоянная Стефана — Больцмана.*

Этот закон был открыт экспериментально Стефаном (1879 г.) и теоретически доказан Л. Больцманом (1884 г.) на основе законов термодинамики.

2. *Закон смещения Вина.* Он позволяет найти смещение длины волны λ_{\max} , соответствующей максимуму испускательной способности а. ч. т., при изменении его температуры. С помощью законов термодинамики и электродинамики Вину (1893 г.) удалось доказать теоретически следующий закон: *длина волны λ_{\max} , на которую приходится максимум испускательной способности а. ч. т., обратно пропорциональна его абсолютной температуре*

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (4.8)$$

где $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ — *постоянная Вина.*

Закон Вина был подтвержден затем экспериментально.

Законы теплового излучения а. ч. т., полученные экспериментально, а также с помощью термодинамического подхода, поставили задачу теоретического объяснения этих законов и вывода формулы [4], которая дает совпадение с экспериментальной испускательной способностью а. ч. т. во всем интервале длин волн. Попытка решения этой задачи в рамках классической физики с помощью статистического подхода была предпринята Релеем и Джинсом.

4.1.3. Формула Релея — Джинса. Ультрафиолетовая катастрофа. Формула Планка

1. *Формула Релея — Джинса.* Расчет испускательной способности а. ч. т. в рамках классической физики был проведен Релеем и Джинсом. Они рассматривали равновесное излучение черного тела в закрытой полости (см. рис. 4.1). Предполагалось, что *атомы стенок полости излучают как совокупность линейных гармонических осцилляторов (электрических диполей) со всевозможными частотами.* Исходя из этого предположения была получена формула для испускательной способности а. ч. т.

$$r_{\lambda,T}^0 = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \langle \epsilon \rangle, \quad (4.9)$$

где $\langle \epsilon \rangle$ — средняя энергия осциллятора.

Затем, предполагая, что *атомы излучают волны непрерывно*, Релей и Джинс записали для средней энергии одного осциллятора $\langle \epsilon \rangle$ следующую формулу:

$$\langle \epsilon \rangle = kT, \quad (4.10)$$

где k — постоянная Больцмана, а T — температура излучающего тела.

Формула (4.10) является следствием *принципа равномерного распределения энергии по степеням свободы*: на каждую степень свободы любого движения приходится энергия, равная $(\langle \epsilon \rangle = kT / 2)$. Отметим, что колебательное движение осцилляторов включает в себя кинетическую и потенциальную энергии, на каждую из которых приходится энергия теплового движения $kT / 2$.

В итоге в рамках классической физики с учетом выражений (4.9) и (4.10) была получена *формула Релея — Джинса*

$$(r_{\lambda,T}^0)_{P-D} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} kT. \quad (4.11)$$

2. *Ультрафиолетовая катастрофа.* Сопоставление графика испускательной способности а. ч. т., построенного по формуле Релея — Джинса (4.11), с экспериментальной кривой свидетельствует о том, что наблюдается хорошее согласие в области длинноволнового излучения и резкое расхождение в области ультрафиолетового и рентгеновского излучений (см. рис. 4.3, б) [4].

Причем расчет энергетической светимости а. ч. т. по формуле Релея — Джинса приводит к бесконечно большой энергии излучения, т. е. нарушается закон сохранения энергии

$$(R_T)_{P-D} = \int_0^{\infty} (r_{\lambda,T})_{P-D} d\lambda = 2\pi ckT \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^4} = \infty.$$

Итак, классическая физика не смогла объяснить зависимости от длины волны спектральной плотности энергетической светимости а. ч. т. во всем интервале длин волн [4]. Сложившееся на тот момент времени состояние в классической физике, когда для теплового излучения наблюдалось резкое расхождение между теорией и экспериментом в ультрафиолетовой области и нарушался закон сохранения энергии, получило название *ультрафиолетовой катастрофы*.

3. *Формула Планка*. Впервые правильная формула для испускательной способности а. ч. т. была получена Планком. Ему пришлось высказать чуждое классической физике предположение о том, что *атомы излучают электромагнитные волны не непрерывно, а отдельными порциями энергии (квантами)*. Это означает, что энергии осцилляторов (атомов) квантуются, т. е. принимают дискретный набор значений

$$W_n = nW_1 \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.12)$$

где W_1 обозначена минимальная энергия осциллятора, называемая также квантом энергии.

Согласно гипотезе Планка энергия W_1 кванта электромагнитной волны частоты ν (энергия фотона) определяется формулой

$$W_1 = W_{\Phi} = h\nu = \hbar\omega = h\frac{c}{\lambda}. \quad (4.13)$$

Она была получена из условия совпадения во всем интервале длин волн расчетной и экспериментальной испускательной способности а. ч. т.

Входящая в формулу (4.13) величина h получила название постоянной Планка, она равна $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Для определения средней энергии $\langle \epsilon \rangle$ осциллятора Планк использовал распределение Больцмана

$$N_n = A \exp(-W_n / kT) = A \exp(-nx), \quad x = W_1 / kT,$$

где в записанной формуле величина N_n дает число осцилляторов на данном энергетическом уровне с номером n .

Тогда для средней энергии $\langle \varepsilon \rangle$ гармонического осциллятора можно записать формулу

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{W_1}{\exp(x) - 1} = \frac{W_1}{\exp(W_1 / kT) - 1}. \quad (4.14)$$

В итоге Планком была записана следующая формула для излучательной способности а. ч. т.:

$$r_{\lambda, T}^0 = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{hc / \lambda}{\exp(hc / \lambda kT) - 1}. \quad (4.15)$$

Полученное выражение для $r_{\lambda, T}^0$ полностью описывает зависимость спектральной плотности энергетической светимости а. ч. т. от длины волны во всем интервале длин волн. Из него также вытекают законы Стефана — Больцмана и Вина [4].

В области длинноволнового излучения, когда можно пренебречь квантованием энергии (дискретностью энергии) осциллятора (атома), по сравнению с энергией теплового движения атомов формула (4.15) приводит к формуле Релея — Джинса (4.11)

$$hc / \lambda kT \ll 1 \Rightarrow \exp(hc / \lambda kT) - 1 \approx hc / \lambda kT + 1 - 1 = hc / \lambda kT.$$

Формула (4.15) позволяет получить точные выражения для постоянной σ Стефана — Больцмана и постоянной b Вина, входящих в опытные законы теплового излучения,

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 h^3 c^2}, \quad b = \frac{hc}{4,965k}.$$

С помощью формулы (4.15) оказалось возможным установить формулу зависимости максимального значения спектральной плотности энергетической светимости а. ч. т. $(r_{\lambda, T}^0)_{\max}$ от его абсолютной температуры,

$$(r_{\lambda, T}^0)_{\max} = c' T^5, \quad (4.16)$$

где постоянная c' равна

$$c' = \frac{2\pi k^5}{c^3 h^4} \cdot \frac{(4,9651)^5}{\exp(4,9651) - 1} = 1,28 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3 \cdot \text{К}^5}. \quad (4.17)$$

Забегая вперед, можно сказать, что предположение Планка об излучении атомами квантов энергии свидетельствует о дискретном ха-

рактуре энергетических уровней атома. Тепловое движение переводит осцилляторы на выше расположенные уровни энергии, затем при переходе на нижние уровни и происходит излучение квантов энергии.

Учитывая такой механизм излучения квантов энергии за счет энергии теплового движения, можно достаточно легко ответить на вопрос *почему спектральная плотность энергетической светимости в области рентгеновских лучей уменьшается до нуля?* Ответ вытекает из различия в энергиях квантов электромагнитного излучения в разных диапазонах волн. Действительно, для того чтобы испустить квант энергии рентгеновского диапазона излучения, необходимо возбудить осциллятор (атом), т. е. перевести его хотя бы на первый возбужденный уровень энергии с номером n , равным единице. Это практически невозможно осуществить за счет энергии теплового движения атомов вследствие большого различия энергии кванта рентгеновского излучения и средней энергии теплового движения атомов: $h\nu \gg kT$.

Так, для температуры $T = 300$ К средняя энергия теплового движения kT составляет $kT = 0,025$ эВ, а первый возбужденный уровень энергии для рентгеновского излучения длины волны $\lambda = 0,1$ нм отстоит от основного уровня энергии на расстояние по энергии, равное

$$\Delta W = hc/\lambda = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8) / 1 \cdot 10^{-10} = 19,89 \cdot 10^{-16} \text{ Дж} = 1,243 \cdot 10^4 \text{ эВ},$$

что превышает энергию теплового движения примерно в $(\Delta W / kT) = 500\,000$ раз. Поэтому такие кванты энергии в области рентгеновского излучения излучаются достаточно редко, что и приводит к уменьшению $r_{\lambda,T}^0$ в этой области длин волн практически до нуля.

Для диапазона инфракрасного излучения ($770 \text{ нм} \leq \lambda \leq 0,5 \text{ мм}$) при комнатной температуре отношение $(\Delta W / kT)$ равно $(64 \div 0,1)$, что приводит к большей интенсивности излучения для этих длин волн.

4.2. Внешний фотоэффект

Внешним фотоэффектом называют явление выбивания электронов из металла под действием падающего излучения.

Объяснение опытных законов фотоэффекта приводит к выводу о том, что электромагнитное излучение не только испускается ато-

мами в виде отдельных порций энергии, но также распространяется и поглощается отдельными порциями энергии, называемыми фотонами. Рассмотрим, как этот вывод был сделан.

4.2.1. Вольт-амперная характеристика, ее основные закономерности

Основные законы фотоэффекта были изучены на установке, схема которой приведена на рис. 4.4, а.

Внутри вакуумной трубки (баллона) находятся два электрода — анод и катод, между которыми прикладывается напряжение U . На катод через кварцевое окно падает монохроматическое электромагнитное излучение, оно выбивает из металла электроны, они летят на анод, цепь замыкается, в цепи возникает электрический ток. Напряжение между анодом и катодом измеряется вольтметром, а сила тока — амперметром.

На этой установке снимаются вольт-амперные характеристики при разных условиях проведения опытов — разные интенсивности и частоты падающего света, различные металлы, из которых изготавливается катод. Для примера одна из вольт-амперных характеристик приведена на рис. 4.4, в. Обсудим ее основные особенности.

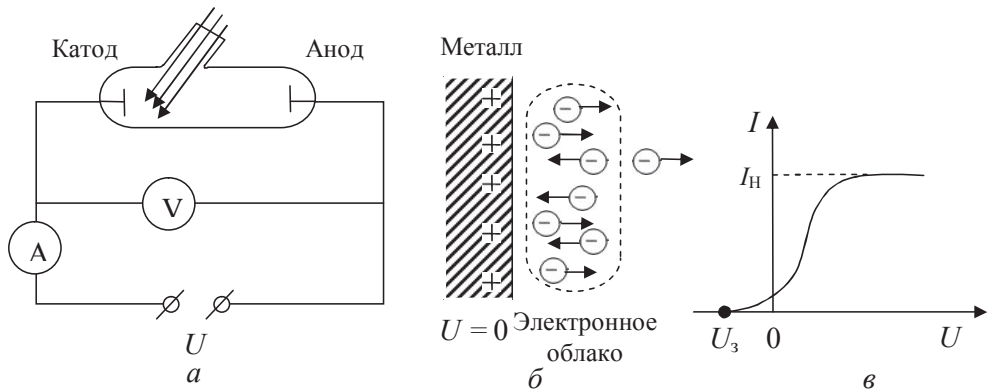


Рис. 4.4

1. $U = 0$. При напряжении U , равном нулю, электрический ток в цепи отличен от нуля (рис. 4.4, б). Электроны, вылетающие с поверхности катода под действием падающего электромагнитного из-

лучения, притягиваются к положительно заряженному металлу и возвращаются снова на металл. Вблизи металла образуется электронное облако, которое образовано электронами, покидающими и возвращающимися на катод. Однако существуют электроны, скорость которых при выходе из металла будет наибольшей. Они способны преодолеть двойной электрический барьер (металл притягивает вылетающий электрон, а электронное облако его отталкивает) вблизи поверхности металла и достигать анода.

2. Напряжение на трубке больше нуля (катод подключается к минусовому зажиму источника напряжения, $U > 0$). В этом случае в трубке появляется электрическое поле и, как следствие, — «электрический ветер», который сносит электроны на анод. Число электронов, достигающих анода, возрастает, электронное облако становится меньше и при больших напряжениях полностью исчезает. Электрический ток достигает насыщения $I = I_H$, т. к. все электроны, выбиваемые с поверхности катода, достигают анода.

3. Напряжение на трубке меньше нуля ($U < 0$). Электрическое поле, возникающее при этом в трубке, тормозит электроны. Появляется «электрический ветер», который препятствует движению электронов к аноду. Сила электрического тока падает и при напряжении, называемом *задерживающим напряжением* U_3 , обращается в ноль. При этом даже самые быстрые электроны не достигают анода, т. е. кулоновская сила электрического поля совершает работу по уменьшению скорости таких электронов до нуля. Согласно теореме о кинетической энергии можно записать следующее равенство:

$$eU_3 = |e|U_3 = \frac{m_e v_{\text{МАКС}}^2}{2}.$$

4.2.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта

Согласно гипотезе Планка электромагнитное излучение испускается в виде отдельных порций энергии — квантов. Эйнштейн предположил, что *электромагнитное излучение не только испускается, но также распространяется и поглощается в виде отдельных порций энергии, которые получили название фотонов*. Следовательно, электромагнитное излучение представляет собой поток особых частиц, называемых фо-

тонами, они обладают корпускулярно волновым дуализмом, сочетают в себе свойства и частицы, и волны. Для расчета энергии W_Φ фотона используют следующие формулы:

$$W_\Phi = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = m_\Phi c^2 = p_\Phi c, \quad (4.18)$$

в которые входит постоянная Планка h , масса m_Φ и импульс p_Φ фотона, длина волны λ и частота ν электромагнитного излучения.

Согласно теории Эйнштейну электрон поглощает фотон. Энергия фотона позволяет электрону выйти из металла (это требует энергии $W_{\text{вых}}$) с кинетической энергией W_k . Энергия выхода $W_{\text{вых}}$ электрона из металла изменяется в зависимости от расстояния, на котором находится электрон внутри металла до его поверхности. Для электронов, вылетающих с поверхности металла, энергия выхода будет минимальной (она для каждого металла имеет определенное значение и называется работой выхода $A_{\text{вых}}$), а их кинетическая энергия будет соответственно максимально возможной. В этом случае на основе закона сохранения энергии запишем:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\text{макс}}^2}{2}. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.19) получило название уравнения Эйнштейна для фотоэффекта.

4.2.3. Опытные законы фотоэффекта, их объяснение

Приведем формулировку экспериментальных законов фотоэффекта, открытых Столетовым в 1886–1889 гг., и их объяснение с точки зрения волновой и корпускулярной теории.

1 закон. Сила I_H фототока насыщения прямо пропорциональна падающему на катод потоку Φ_s электромагнитного излучения при фиксированном его спектральном составе ($I_H \sim \Phi_s$). В соответствии с формулой (4.18) для потока Φ_s , падающего на металл излучения, и для силы фототока насыщения можно записать

$$\Phi_s = \frac{dW_s}{dt} = \frac{dN_\Phi(h\nu)}{dt}, \quad I_H = \frac{dq}{dt} = \frac{|e|dN_{\text{эл}}}{dt},$$

где dN_{Φ} и $dN_{\text{эл}}$ — число падающих на катод фотонов и число электронов, вылетающих из него за время dt . Известно, что лишь малая часть фотонов выбивает электроны, большая часть фотонов поглощается металлом, идет на его нагревание. Можно записать формулу связи между числом падающих фотонов dN_{Φ} и числом вылетающих электронов $dN_{\text{эл}}$

$$dN_{\text{эл}} = \eta \cdot dN_{\Phi},$$

где входящая в это выражение постоянная η существенно меньше единицы.

Учитывая это соотношение, можно получить следующую формулу связи:

$$I = \frac{|e|dN_{\text{эл}}}{dt} = \frac{|e|\eta dN_{\Phi}}{dt} = \frac{|e|\Phi_s dt}{(h\nu)dt} = \frac{|e|\eta}{(h\nu)} \Phi_s, \quad (4.20)$$

что подтверждает первый закон фотоэффекта. Действительно, при постоянной частоте падающего излучения ($\nu = \text{const}$) из формулы (4.20) следует, что $I_{\text{н}} \sim \Phi_s$.

Волновая теория также объясняет первый закон, т. к. энергия падающей волны определяется ее амплитудой и частотой. Увеличение потока падающего монохроматического излучения связано с увеличением его амплитуды, что и приводит к выбиванию большего числа электронов из металла, т. е. к большей силе тока насыщения.

2 закон. Максимальная кинетическая энергия вылетающих с поверхности катода электронов зависит линейно от частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности.

Для объяснения второго закона запишем уравнение Эйнштейна в следующем виде:

$$h\nu = A_{\text{вых}} + W_{\text{к макс}}. \quad (4.21)$$

Из этого уравнения следует, что максимальная кинетическая энергия $W_{\text{к макс}}$ вылетающих электронов будет пропорциональна частоте падающего излучения ($W_{\text{к макс}} \sim \nu$), т. к. для каждого металла работа выхода является постоянной величиной.

При обычных интенсивностях падающего излучения один электрон поглощает один фотон, вероятность многофотонных процессов практически равна нулю, поэтому $W_{\text{к макс}}$ не зависит от интенсивности

падающего излучения, т.е. от числа фотонов, падающих на металл в единицу времени.

Волновая теория объясняет второй закон фотоэффекта лишь частично. Увеличивая частоту волны, можно увеличить энергию вылетающего электрона, что объясняет пропорциональность максимальной кинетической энергии $W_{\text{к макс}}$ вылетающего электрона частоте падающего излучения. Но волновая теория не может объяснить, почему увеличение амплитуды волны, т.е. интенсивности волны, не приводит к увеличению $W_{\text{к макс}}$ электрона.

3 закон. Существует красная граница $\nu_{\text{к}}$ фотоэффекта — такая минимальная частота падающего излучения, ниже которой фотоэффект не наблюдается [4].

Для частот $\nu \geq \nu_{\text{к}}$ фотоэффект наблюдается, а для частот $\nu < \nu_{\text{к}}$ фотоэффект отсутствует. Под красной границей фотоэффекта также понимают длину волны $\lambda_{\text{к}} = c/\nu_{\text{к}}$. В этом случае фотоэффект будет наблюдаться, если длина волны падающего на металл излучения будет меньше или равна красной границе фотоэффекта $\lambda_{\text{к}}$: $\lambda \leq \lambda_{\text{к}}$.

Для объяснения третьего закона фотоэффекта рассмотрим уравнение (4.21). При уменьшении частоты падающего излучения левая часть уравнения (4.21) уменьшается, следовательно, будет уменьшаться и максимальная кинетическая энергия вылетающих из металла электронов (для каждого металла $A_{\text{вых}} = \text{const}$). При частоте излучения, равной красной границе фотоэффекта ($\nu = \nu_{\text{к}}$), энергии фотона хватает только на выход электрона из металла: $h\nu_{\text{к}} = A_{\text{вых}}$, $W_{\text{к макс}} = 0$. Если частота излучения будет меньше $\nu_{\text{к}}$, то тогда энергии фотона не хватит на вылет электрона из металла и фотоэффекта не будет.

Таким образом, красная граница фотоэффекта для данного металла определяется формулой

$$\nu_{\text{к}} = A_{\text{вых}} / h, \lambda_{\text{к}} = c/\nu_{\text{к}} = hc / A_{\text{вых}}. \quad (4.22)$$

Волновая теория этот закон объяснить не может. Это связано с тем, что согласно волновой теории при малой частоте волны можно так увеличить ее амплитуду, что энергии волны будет достаточно для наблюдения фотоэффекта и при значениях ν , меньших $\nu_{\text{к}}$ ($\nu < \nu_{\text{к}}$).

Отметим, что *фотоэффект является безынерционным явлением*. Если послать излучение на металл, то практически мгновенно из металла будут вылетать электроны, никакой задержки в их вылете не будет. Согласно Эйнштейну процесс поглощения фотона электроном будет

происходить мгновенно и сразу же будет наблюдаться выход электронов из металла.

В волновой теории этот факт не объясняется, т. к. на раскачку электрона (он будет совершать вынужденные колебания) падающей волной до энергии, необходимой для выхода из металла, требуется время.

Подводя итог обсуждению опытных законов фотоэффекта, можно сделать вывод о том, что они находят свое полное объяснение в рамках корпускулярной теории электромагнитного излучения и оставляют много вопросов без ответа в рамках волновой теории.

4.2.4. Зависимость задерживающего напряжения от частоты.

Многофотонный фотоэффект

Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (4.19) в следующем виде:

$$h\nu = A_{\text{ВЫХ}} + |e| \cdot |U_3| \Rightarrow |U_3| = \frac{h}{|e|} \nu - \frac{A_{\text{ВЫХ}}}{|e|}.$$

График этой зависимости приведен на рис. 4.5.

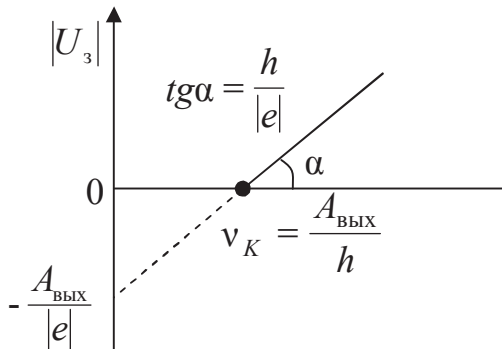


Рис. 4.5

По графику можно найти постоянную Планка h ($h = |e| \cdot \text{tg} \alpha$) и красную границу ν_K для данного металла (по точке пересечения графика с осью частот: $U_3 = 0 \Rightarrow \nu = A_{\text{ВЫХ}}/h = \nu_K$).

При падении от лазеров на катод электромагнитного излучения большой интенсивности возможно протекание многофотонных про-

цессов, при которых один электрон при выходе из металла поглощает несколько фотонов ($N = 2, 3, 4$ и т. д.). Это приводит к другой форме записи уравнения Эйнштейна для фотоэффекта

$$Nh\nu = A_{\text{вых}} + \frac{m_e v_{\text{МАКС}}^2}{2}. \quad (4.23)$$

Это приводит к нарушению (видоизменению) третьего закона для фотоэффекта. Согласно уравнению (4.23) фотоэффект возможен и для частот, меньших красной границы фотоэффекта ν_K (4.22). Она будет смещаться в сторону меньших частот: $\nu'_K = A_{\text{вых}} / (Nh)$. Также нарушается (видоизменяется) и первый закон для фотоэффекта.

4.3. Эффект Комптона

Рассмотрим эксперимент по рассеянию рентгеновского излучения веществом. Пучок рентгеновских лучей с определенной длиной волны λ падает на кристалл и рассеивается им под разными углами (см. рис. 4.6, а).

Оказывается, что в рассеянном излучении наряду с излучением с длиной волны λ (несмещенная компонента излучения) появляется рассеянное излучение с длиной волны λ' (смещенная компонента излучения), причем $\lambda' > \lambda$ (см. рис. 4.6, б) [4].

В появлении смещенной компоненты в рассеянном веществе рентгеновском излучении и заключается эффект Комптона. При этом оказывается, что λ' не зависит от природы рассеивающего вещества и рассчитывается по формуле [4]

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta). \quad (4.24)$$

Входящая в выражение (4.24) величина λ_C называется комптоновской длиной волны, она равна

$$\lambda_C = \frac{h}{m_{oe} c} = 2,426 \text{ пм}. \quad (4.25)$$

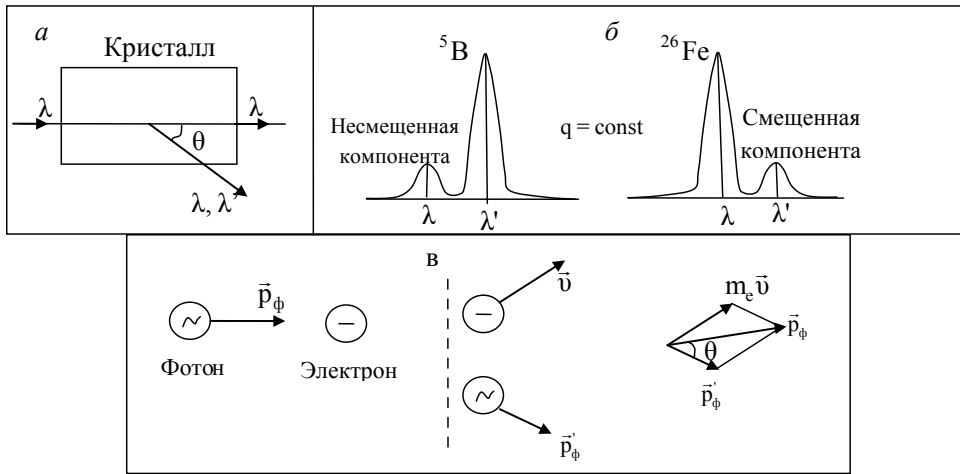


Рис. 4.6

В явлении фотоэффекта энергия фотона мала по сравнению с энергией покоя свободного электрона, поэтому происходит поглощение фотона электроном

$$W_{\Phi}/W_{0e} = h\nu/m_{0e}c^2 = (6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 6 \cdot 10^{16}) / (9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}) \approx 5 \cdot 10^{-4}.$$

В области рентгеновских лучей энергия фотона возрастает настолько ($W_{\Phi}/W_{0e} \approx 0,05$), что процесс взаимодействия электрона и фотона принимает совершенно другой характер, а именно, происходит процесс упругого рассеяния фотона на электроне.

Смещенная компонента появляется при рассеянии падающего излучения на свободных электронах. Под ними понимают электроны, энергия связи которых с атомом будет значительно меньше энергии налетающего на них фотона.

При выводе формулы (4.24) использованы законы сохранения энергии (4.26) и импульса (4.27) для процесса упругого взаимодействия электрона и фотона (рис. 4.6, в)

$$\frac{hc}{\lambda} + m_{0e}c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + m_e c^2, \quad (4.26)$$

$$\vec{p}_{\Phi} = \vec{p}'_{\Phi} + m_e \vec{v}. \quad (4.27)$$

Несмещенная компонента возникает при рассеянии фотонов на сильно связанных с атомами электронах, для них энергия связи

с атомом значительно превосходит энергию налетающего фотона. Поэтому процесс рассеяния фотона будет происходить не с электроном, а с атомом, что приводит к существенному уменьшению различия между длинами волн λ' и λ (порядка в $1 \cdot 10^4$ раз) — в этом случае в формулу (4.25) войдет не масса покоя электрона, а масса покоя атома. Такое различие в длинах волн в эффекте Комптона не обнаруживается [4].

Относительно интенсивностей смещенной и несмещенной компоненты можно отметить следующее. Интенсивность смещенной компоненты будет больше, чем интенсивность несмещенной компоненты для элементов с малым номером в таблице Менделеева (см. рис. 4.6, б). Это связано с тем, что для атомов с малым атомным номером преобладают электроны, слабо связанные с атомами, поэтому в основном идет рассеяние фотонов на свободных электронах. Для атомов с большими атомными номерами будет преобладать число электронов, сильно связанных с атомами, поэтому интенсивность несмещенной компоненты будет больше (см. рис. 4.6, б) [4].

4.4. Природа электромагнитного излучения. Корпускулярно-волновой дуализм

Электромагнитное излучение в одних опытах проявляет волновые свойства (интерференция, дифракция и поляризация света), а в других корпускулярные свойства (тепловое излучение, фотоэффект, эффект Комптона и т. д.) [4]. Возникает вопрос: что представляет собой электромагнитное излучение?

С современной точки зрения ЭМИ представляет собой поток особых частиц, называемых фотонами. Они обладают корпускулярно-волновым дуализмом [4], сочетают в себе свойства и частицы, и волны одновременно. Корпускулярно—волновой дуализм электромагнитного излучения наглядно представлен на рис. 4.7.

Взаимосвязь корпускулярной и волновой картины можно видеть в записи энергии фотона (4.18), где она выражается через волновые (через длину и частоту волны) и корпускулярные (через массу и импульс) свойства фотона. Выражение вида

$$p_{\Phi} = \frac{h}{\lambda} \quad (4.27)$$

наглядно отражает корпускулярно-волновой дуализм фотона.

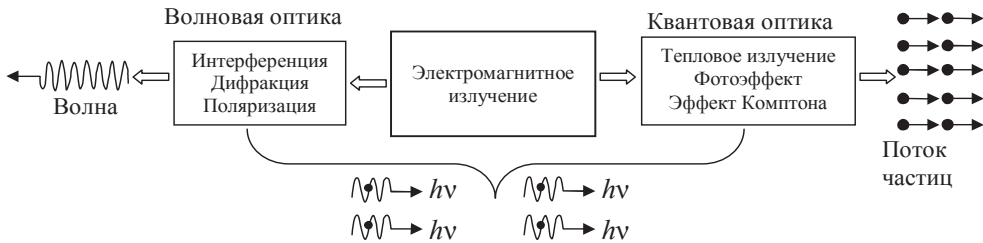


Рис. 4.7

Для того чтобы полнее понять взаимосвязь разных картин описания фотона, выясним, какие свойства частицы и волны в классическом понимании этих слов сохраняются у фотона. Для этого сначала перечислим свойства волны и частицы, которыми они обладают в классической механике:

— *частица*: 1) неделима во всех взаимодействиях; 2) имеет траекторию движения; 3) локализована в пространстве, т. е. в данный момент времени занимает определенную точку пространства;

— *волна*: 1) делится; 2) не имеет траектории движения; 3) занимает все пространство.

Рассмотрим теперь, что произойдет с фотоном при прохождении им щели (рис. 4.8, *а*). Из опыта известно, что фотон при прохождении щели попадет в определенную точку экрана, т. е. как частица фотон является неделимым при любых взаимодействиях. Фотон как волна испытывает явление дифракции и может отклониться на произвольный угол от первоначального направления движения.

Точное значение этого угла неизвестно, известна лишь вероятность его отклонения на разные углы. Наибольшая вероятность соответствует тем углам, при которых наблюдаются максимумы дифракционной картины, получаемой при накоплении достаточно большого числа фотонов (рис. 4.8, *б*).

Волновые свойства у электромагнитного излучения (потока фотонов) проявляются в таких явлениях, как интерференция, дифракция и поляризация. Волновые же свойства отдельного фотона проявляются в вероятностном характере его поведения, они описывают вероят-

ность его обнаружения в различных точках экрана (пространства). Эта особенность волновых свойств фотона является важной при построении квантовой механики — механики частиц малой массы

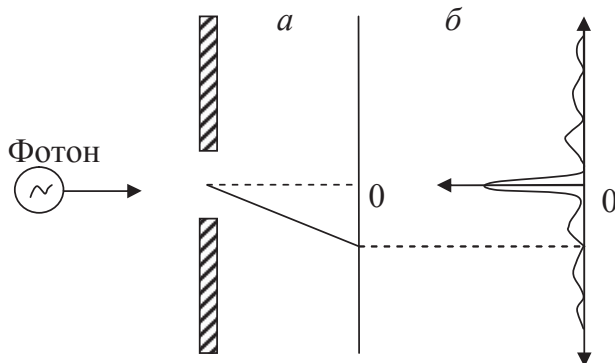


Рис. 4.8

Отметим, что корпускулярные свойства электромагнитного излучения проявляются все четче и четче при увеличении его частоты или уменьшении его длины волны.

5. Элементы квантовой механики

5.1. Идея де Бройля. Опыты, подтверждающие волновые свойства микрочастиц

В начале XX века сложилась ситуация, при которой физическая теория не могла объяснить строения атомов, их спектры излучения и много других фактов, связанных с микромиром.

Существующая в то время полуклассическая теория Бора смогла лишь объяснить спектры излучения атомарного водорода, причем не было ясно, как рассчитывать интенсивности излучаемых линий. Спектры излучения второго элемента в таблице Д. И. Менделеева не получили никакого объяснения в теории Бора. Причем теория Бора была полуклассической. Она вводила в классическую физику не свои собственные постулаты. Поэтому теория Бора не могла стать основой создания новой теории движения частиц, обладающих малой массой. Нужны были новые идеи.

В то время было известно, что электромагнитное излучение обладает корпускулярно-волновым дуализмом, представляет собой поток особых частиц — фотонов, которые сочетают в себе свойства и частицы, и волны.

В 1927 г. французский физик Луи де Бройль обобщил корпускулярно-волновой дуализм на все частицы материи. Он высказал гипотезу, согласно которой каждой частице материи массой m , движущейся со скоростью \vec{v} , можно поставить в соответствие волновой процесс, длина волны которого рассчитывается по формуле

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (5.1)$$

где p — импульс частицы.

Волны, которые соответствуют движущейся частице, получили название волн де Бройля, а их длина — длина волны де Бройля.

Это предположение в то время выглядело слишком смелым, т. к. тела большой массы не проявляли на эксперименте волновых свойств. Действительно, для тела массой $m = 1$ кг, которое движется со скоростью $v = 10$ м/с, длина волны де Бройля составляла

$$\lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{1 \cdot 10} = 6,63 \cdot 10^{-35} \text{ м.}$$

Экспериментально можно обнаружить волны с длиной волны $\lambda > 1 \cdot 10^{-18}$ м. Поэтому тела с большой массой, макротела, не проявляют на опыте своих волновых свойств. Если же уменьшать массу тела, то из формулы (5.1) следует, что длина волны де Бройля будет увеличиваться и для частиц малой массы можно обнаружить их волновые свойства. Частицы, для которых можно на эксперименте обнаружить волновые свойства, принято называть *микрочастицами*.

В связи с высказанной де Бройлем идеей был поставлен ряд опытов по обнаружению волновых свойств у микрочастиц. Рассмотрим наиболее важные из них, которые вошли в историю физики.

1. *Опыты Девиссона и Джермера (1927 г.)*. С помощью электронной пушки формировался пучок электронов с постоянной скоростью v , который посылался под углом скольжения θ на поверхность кристалла. Интенсивность I отраженного пучка электронов измерялась приемником (рис. 5.1, а). При фиксированном угле скольжения θ изменяли непрерывно напряжение U на электронной пушке [4]. При этом оказалось, что зависимость интенсивности I от квадратного корня напряжения на электронной пушке (\sqrt{U}) носит немонотонный характер (рис. 5.1, б).

В частности, на ней имеются максимумы и минимумы, что подтверждает волновые свойства пучка электронов, т. е. подтверждает гипотезу де Бройля. Причем максимумы интенсивности наблюдались на одинаковом расстоянии друг от друга (см. рис. 5.1, б) [4], что можно объяснить с помощью формул (5.1) для длины волны де Бройля и Вульфа-Брега ($2d\sin\theta = n\lambda$), выражающей условие максимумов при дифракции рентгеновских лучей на кристаллической решетке.

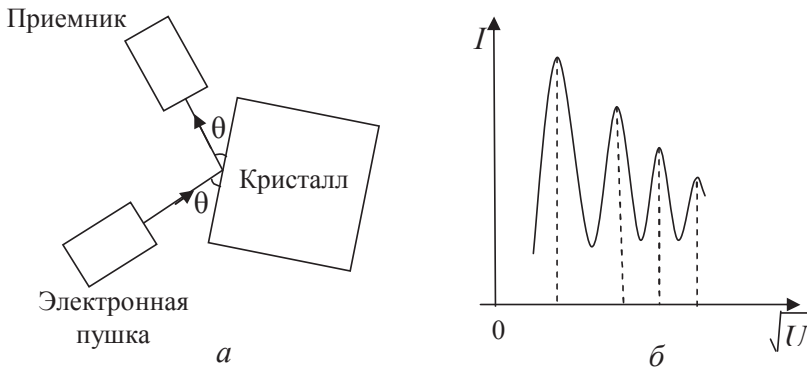


Рис. 5.1

$$\frac{m v^2}{2} = |e|U \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2|e|U}{m}} \Rightarrow \lambda_B = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2m|e|U}}, \quad 2d \sin \theta = n\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2d \sin \theta}{n};$$

$$\lambda = \lambda_B \Rightarrow \sqrt{U} = \text{const} \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где учтено, что угол скольжения θ и постоянная решетки d кристалла остаются неизменными при проведении опытов.

Выбирая из опыта конкретные значения $U = 54 \text{ В}$, $\theta = 64^\circ$ ($n = 1$) и $d = 0,0929 \text{ нм}$, можно получить хорошее совпадение длин волн, рассчитанных по формулам (5.1) и Вульфа — Брега, а именно $\lambda = \lambda_B = 0,167 \text{ нм}$.

Полученное хорошее совпадение значений длин волн де Бройля, рассчитанных разными способами, доказывает справедливость формулы де Бройля.

В другой серии опытов с помощью электронной пушки формировался пучок электронов с постоянной скоростью v , который посылался на монокристалл, перпендикулярно к его поверхности. В опытах фиксировалась интенсивность I отраженного от поверхности кристалла пучка электронов при различных углах φ между падающим и отраженным пучками. Полученные кривые зависимости интенсивности I отраженного пучка электронов от угла при разных напряжениях U на электронной пушке оказались немонотонными, на них наблюдались максимумы и минимумы, что также подтверждает волновые свойства пучка электронов, т. е. подтверждает гипотезу де Бройля.

2. Опыты Томпсона и Тартаковского. Пучок электронов, имеющих постоянную скорость v , посылался на тонкий лист металла [4], кото-

рый можно рассматривать как трехмерную дифракционную решетку, результат прохождения пучка рассматривался на экране, расположенном за этим листом металла (рис. 5.2).

На экране наблюдалась дифракционная картина в виде светлых и темных колец. Это доказывало наличие волновых свойств у пучка электронов. Расчет длины волны волнового процесса, сопровождающего движение пучка электронов, с помощью формулы де Бройля и с помощью формулы для дифракции рентгеновских лучей приводит к совпадению этих длин волн. Это подтверждает формулу де Бройля (5.1). Для того чтобы проверить тот факт, что дифракционная картина не была получена фотонами, которые могут выбивать электроны, попадая на металлическую пластинку, установка помещалась в магнитное поле.

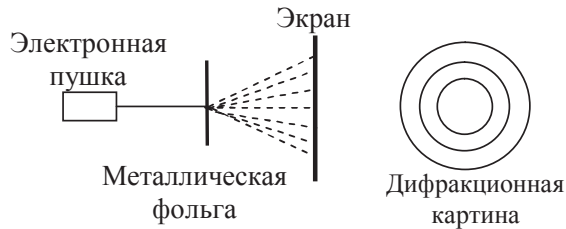


Рис. 5.2

В этом случае картина дифракции смещалась, что связано с тем, что на электроны, прошедшие металлическую фольгу, действовала со стороны магнитного поля сила Лоренца. Если бы картина дифракции была бы создана фотонами (у них электрический заряд равен нулю и сила Лоренца на них не действует), такого смещения не наблюдалось бы.

Аналогичные опыты были поставлены и для других микрочастиц (протоны, атомы, молекулы и т. д.). Все это подтвердило наличие волновых свойств у потока микрочастиц.

3. Опыты Бибермана, Сушкина и Фабриканта. Из приведенных выше опытов не было ясно, чему приписать волновые свойства — потоку частиц или отдельной частице.

Для ответа на этот вопрос учеными Л. Биберманом, Н. Сушкиным и В. Фабрикантом был поставлен следующий опыт. На установке, подобной установке в опыте Тартаковского и Томпсона, была создана малая интенсивность пучка электронов, а именно, проме-

жуток времени между последовательными вылетами двух электронов из электронной пушки в 40 000 раз превышал время пролета одним электроном всей установки. Этим самым исключалось влияние других электронов на прохождение одним электроном всей установки.

Результаты опыта оказались следующими: отдельный электрон, проходя установку, случайно отклонялся и попадал в какую-то точку экрана (в этом месте экрана на фоточувствительной пластинке появлялась темная точка), при накоплении достаточно большого числа электронов хаотичная картина случайных точек на экране превращалась в упорядоченную картину дифракции.

Таким образом, было доказано, что волновыми свойствами обладает отдельно движущийся электрон. Итак, микрочастица обладает волновыми свойствами, которые проявляются в вероятностном характере ее поведения, в различной вероятности ее обнаружения в разных точках пространства.

5.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

5.2.1. Соотношения неопределенностей как проявление волновых свойств

В отличие от классических частиц, микрочастицы обладают волновыми свойствами, поэтому для них не всегда применимы такие классические понятия, как координата, импульс, время, энергия, траектория движения и т.д. В связи с этим возникают ограничения на применимость этих понятий для описания движения микрочастиц. Эти ограничения устанавливаются соотношениями неопределенностей Гейзенберга, согласно которым *произведение неопределенностей $(\Delta A, \Delta B)$ двух сопряженных величин (A, B) не может быть меньше постоянной Планка \hbar* [4]:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \hbar \quad (\hbar/2, \quad h = 2\pi\hbar). \quad (5.2)$$

В формуле (5.2) в правой части в разных учебных пособиях записывают либо \hbar , либо $\hbar/2$, либо h . Здесь важен порядок величины, а не конкретная цифра.

Сопряженными называют величины, которые не могут иметь одновременно точных значений. Так, в квантовой механике сопряженными величинами являются следующие пары величин: координата и соответствующая ей проекция импульса микрочастицы, а также энергия и время.

Приведем ряд примеров на соотношение неопределенностей Гейзенберга.

1. Сопряженными величинами являются координата и соответствующая ей проекция импульса: $A = x$, $B = p_x$. Тогда для них соотношение (5.2) можно записать в виде

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar. \quad (5.3)$$

Отметим, что такое же неравенство справедливо и для других координат (y , z) и соответствующим им проекциям импульса:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \geq \hbar, \quad \Delta z \cdot \Delta p_z \geq \hbar. \quad (5.4)$$

Если координата и проекция импульса друг другу не соответствуют, то тогда они одновременно могут иметь точные значения, для них соотношения неопределенностей Гейзенберга не выполняются. Например, $\Delta z \cdot \Delta p_x = 0$, $\Delta z \cdot \Delta p_y = 0$, $\Delta x \cdot \Delta p_y = 0$, $\Delta x \cdot \Delta p_z = 0$.

Для того чтобы показать справедливость формул (5.3), (5.4), рассмотрим пример прохождения электроном щели шириной a (см. рис. 5.3, а). Волновые свойства электрона приводят к тому, что при прохождении им щели понятие траектории для электрона будет неприменимо (иначе он попадал бы только в центр экрана). Вследствие этого он случайным образом меняет направление своего первоначального движения, попадая с различной вероятностью в разные точки экрана — наибольшей вероятности соответствует наибольшая интенсивность при дифракции электронного пучка на одной щели. Если посылать на щель по одному электрону, то тогда при накоплении достаточно большого числа электронов на экране возникнет дифракционная картина. Причем максимальной интенсивности дифракционной картины будет соответствовать наибольшая вероятность попадания электрона в данную точку экрана. Итак, волновые свойства электрона описывают вероятность его обнаружения в разных точках экрана (пространства).

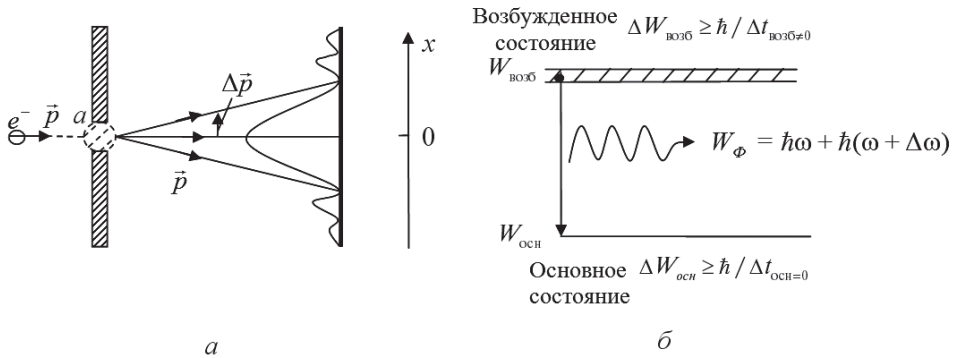


Рис. 5.3

При прохождении щели неопределенность координаты будет равна $\Delta x = a$, а после прохождения щели разброс импульсов электрона будет располагаться, в основном, в пределах первого максимума дифракционной картины при дифракции света на одной щели. Из рис. 5.3, а видно, что

$$\Delta p_x = p \sin \varphi = p \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{a} = \frac{h}{a},$$

поэтому

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = a \cdot \frac{h}{a} = h,$$

что и требовалось показать.

При оценке Δp_x было учтено, что первый минимум при дифракции электронов на одной щели наблюдается при угле φ , определяемом из условия дифракционных минимумов (3.22).

Отметим, что неизвестно каким образом электроны проходят щель, что происходит с электронами в области щели, и новая теория квантовой механики не дает ответа на этот вопрос, она лишь дает результаты прохождения пучком электронов преграды с одной щелью.

2. Сопряженными величинами являются энергия и время ($A = W$, $B = t$). Для них соотношение (5.2) запишется в виде

$$\Delta W \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (5.5)$$

В формуле (5.5) W — энергия частицы в квантовом состоянии; ΔW — неопределенность (ширина, размытие или разброс) по энергии данного квантового состояния, Δt — неопределенность времени жизни частицы в данном квантовом состоянии.

Выражение (5.5) приводит к тому, что каждая линия излучения имеет естественную ширину или каждый излучаемый фотон имеет разброс по частотам. Поясним это с помощью рис. 5.3, б. В основном состоянии атом может находиться сколь угодно долго ($\Delta t_{\text{осн}} = \infty$), поэтому ширина по энергии такого состояния равна нулю: $\Delta W_{\text{осн}} \geq \hbar/\Delta t_{\text{осн}} = 0$. В возбужденном состоянии атом может находиться в течение времени, равном $\Delta t_{\text{возб}} \approx 1 \cdot 10^{-8}$ с, что приводит к размытию по энергии возбужденного уровня энергии атома: $\Delta W_{\text{возб}} \geq \hbar/\Delta t_{\text{возб}} \neq 0$. Поэтому излучаемый при переходе в основное состояние фотон будет иметь разброс по частоте [4], равный $\Delta\omega = \Delta W_{\text{ф}}/\hbar = \Delta W_{\text{возб}}/\hbar \approx 1/\Delta t_{\text{возб}} \approx 1 \cdot 10^8$ рад/с.

5.2.2. Условия применимости классической механики для описания движения микрочастиц

Запишем условия, при которых для описания движения микрочастиц, обладающих волновыми свойствами, можно применять законы классической механики. Это возможно, если применимо понятие траектории, т. е. одновременно с достаточной степенью точности можно пользоваться понятиями координаты и импульса для микрочастицы

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} \ll 1, \quad \frac{\Delta x}{L} \ll 1. \quad (5.6)$$

В формуле (5.6) величина L представляет собой характерный размер установки. Эти условия можно объединить в одно, выражая неопределенности задания импульса и координаты из соотношений неопределенностей Гейзенберга (5.3) и перемножая неравенства в формуле (5.6)

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} \cdot \frac{\Delta x}{L} \ll 1 \Rightarrow \frac{\hbar}{\Delta x \cdot h/\lambda_B} \cdot \frac{\Delta x}{L} = \frac{\lambda_B}{2\pi L} \ll 1 \Rightarrow \lambda_B \ll L. \quad (5.7)$$

Согласно формуле (5.7) классическая механика применима для описания движения микрочастиц, если можно пренебречь волновыми

свойствами частицы, т. е. длина волны де Бройля существенно меньше характерного размера установки [4].

Приведем ряд примеров, поясняющих условия (5.6) и (5.7).

Пример 1. Движение электрона в электронно-лучевой трубке. Пусть длина трубки составляет $l = 0,10$ см, напряжение на трубке $U = 10$ кВ. За счет расходимости пучка электронов радиус пятна на экране составляет $r = 1,0 \cdot 10^{-5}$ м.

Оценим точность задания импульса электрона. Из рис. 5.4 можно видеть, что

$$\frac{\Delta p_x}{p_x} = \frac{r}{l} = 1 \cdot 10^{-4} \ll 1,$$

т. е. понятием импульса можно пользоваться с достаточной степенью точности.

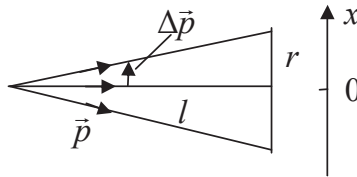


Рис. 5.4

Оценим точность задания координаты электронов. Характерным размером установки здесь является радиус пятна пучка электронов на экране $r = L$. Используя соотношение неопределенностей Гейзенберга (5.3), получим

$$\frac{\Delta x}{L} \approx \frac{\hbar}{L \Delta p_x} = \frac{\hbar}{L p_x \cdot 10^{-4}} = \frac{\hbar}{10^{-5} \cdot \sqrt{2m|e|U} \cdot 10^{-4}} = \frac{1 \cdot 10^{-25}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4}} \approx 2 \cdot 10^{-3} \ll 1.$$

Как видно, координата электронов так же задана с достаточной степенью точности, т. е. движение электронов в электронно-лучевой трубке можно описывать с помощью уравнений классической механики.

Пример 2. Электрон в атоме. Размеры атома составляют $L \approx 1 \cdot 10^{-10}$ м, они являются характерным размером данной задачи. Из теории Бора для атома водорода известно, что скорость электрона на первой боровской орбите равна $v \approx 1 \cdot 10^6$ м/с. Оценим длину волны де Бройля, соответствующую электрону в атоме водорода

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_0 v} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6} \approx 7 \cdot 10^{-10} \text{ м} \Rightarrow \lambda_{\text{Б}} > L.$$

Следовательно, при описании поведения электрона в атомах необходимо использовать новую теорию — квантовую механику.

5.3. Волновая функция. Стандартные условия. Уравнение Шредингера

Итак, движению микрочастицы соответствует волновой процесс с длиной волны $\lambda_{\text{Б}}$. Возникает вопрос о природе этих волн де Бройля. Сначала считали, что волны де Бройля это электромагнитные волны, а микрочастица представляет собой волновой пакет из ЭМВ. Однако такое представление оказалось неверным, т. к. из-за явления дисперсии волновой пакет (совокупность ЭМВ с частотами, заключенными в интервале от ω до $(\omega + \Delta\omega)$), распространяясь в среде, расплывается, что противоречит стабильности существования микрочастиц.

Правильная трактовка природы волн де Бройля была дана М. Борном в 1927 г. Согласно Борну волны де Бройля это волны вероятности, а волновая функция представляет собой амплитуду вероятности. Физический смысл имеет квадрат модуля волновой функции $|\Psi(x, y, z, t)|^2$ — это плотность вероятности $P(x, y, z, t)$, она равна отношению вероятности $dP(x, y, z, t)$ найти частицу в момент времени t в бесконечно малом объеме dV , взятом около точки с координатами (x, y, z) , к величине этого объема dV

$$|\Psi(x, y, z, t)|^2 = P(x, y, z, t) = \frac{dP(x, y, z, t)}{dV}. \quad (5.8)$$

В связи с вероятностным смыслом волновой функции на нее накладываются стандартные условия, а именно, волновая функция и ее частные производные по координатам должны быть непрерывными, однозначными и конечными.

На рис. 5.5, а показаны точки, которые должны отсутствовать на графике для волновой функции или для модуля квадрата волновой функции.

Для волновой функции справедливо условие нормировки

$$\int_V |\Psi(x, y, z, t)|^2 dV = 1, \quad (5.9)$$

оно дает вероятность найти частицу в какой-то момент времени в объеме ее существования, это есть вероятность достоверного события, поэтому такой интеграл равен единице.

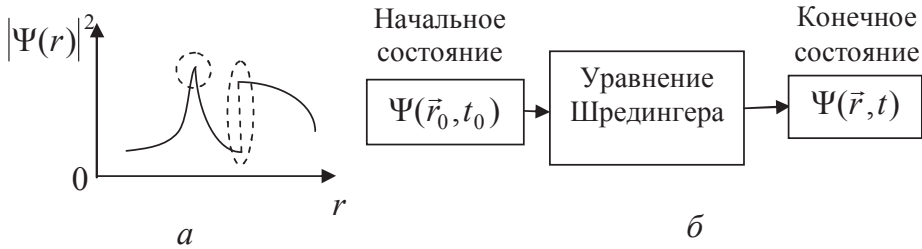


Рис. 5.5

Рассмотрим теперь, как решается задача о движении частицы в классической и квантовой механике. В классической механике состояние частицы в какой-то момент времени определяется заданием ее координат и импульса. Поэтому схема решения задачи здесь выглядит следующим образом: задаются координаты и импульс частицы в начальный момент времени, затем решается уравнение второго закона Ньютона и в итоге получают координаты и импульс в конечный момент времени.

Такую схему решения задачи в квантовой механике применить нельзя, т. к. из-за соотношения неопределенностей Гейзенберга нельзя одновременно точно задать координаты и импульс частицы. Здесь состояние частицы однозначно определяется заданием ее волновой функции, поэтому решается уравнение для этой волновой функции и таким образом однозначно находится конечное состояние частицы, т. е. ее волновая функция в момент времени t (рис. 5.5, б).

Впервые основное уравнение квантовой механики — уравнение для волновой функции — было записано в 1926 г. Э. Шредингером и получило название уравнения Шредингера.

Обычно рассматриваются силовые поля, которые явно не зависят от времени t . Они называются стационарными полями. В таких полях потенциальная энергия частицы не зависит от времени ($U = U(x, y, z)$),

а полная энергия частицы остается постоянной ($W = U + W_K = \text{const}$) [4]. Волновую функцию для частицы в этом случае можно представить в виде произведения временной ее части на координатную часть $\psi(x, y, z)$

$$\Psi(x, y, z, t) = A e^{-i(\frac{W}{\hbar})t} \psi(x, y, z). \quad (5.10)$$

Для координатной части волновой функции уравнение Шредингера (его называют стационарным уравнением Шредингера) примет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(x, y, z) \psi = W \psi. \quad (5.11)$$

В этом уравнении $\hbar = h / (2\pi)$ — постоянная Планка, деленная на 2π ; m — масса частицы; $U(x, y, z)$ — потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — опера-

тор Лапласа, его действие на волновую функцию сводится к взятию вторых частных производных по координатам.

Уравнение Шредингера является основным уравнением квантовой механики, оно не выводится, его справедливость проверяется сопоставлением полученных из него результатов с опытными данными [4]. Его роль в квантовой механике такая же как — уравнения Ньютона в классической механике, уравнения Максвелла в электродинамике или трех начал в термодинамике.

Решая уравнение Шредингера, можно найти энергетический спектр частицы и вероятность ее обнаружения в различных точках пространства. Эти сведения используются для анализа поведения частицы в потенциальном поле определенного вида. Более детальной информации квантовая механика о поведении частиц не дает.

Это не является недостатком теории, а является следствием вероятностного поведения частицы в пространстве. Нельзя думать, что будет создана теория, которая будет давать более детальную информацию о поведении частиц. Поведение частиц вне экспериментальной ситуации, т. е. самих по себе, нам недоступно, т. к. мы живем в макромире и используем понятия макромира. О наличии микромира мы узнаем из поведения частиц в экспериментальной ситуации, и это нужно помнить и не стараться брать из теории то, что она не может дать.

Рассмотрим решение ряда задач квантовой механики, имеющих точное решение. Таких задач существует немного, и они играют важную роль при анализе экспериментальных данных.

5.3.1. Микрочастица в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками

Потенциальной ямой называется область пространства, в которой потенциальная энергия частицы много меньше, чем в соседних областях.

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную задачу о движении частицы во внешнем силовом поле, в котором потенциальная энергия частицы задана следующими соотношениями:

$$U(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 & |\psi|^2 = 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq l & |\psi|^2 \neq 0 \\ \infty & x > l & |\psi|^2 = 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Вид потенциального поля приведен на рис. 5.6, а. Из него видно, что частица находится в потенциальной яме ($0 \leq x \leq l$) с бесконечно высокими прямоугольными стенками, за пределы которой она выйти не может.

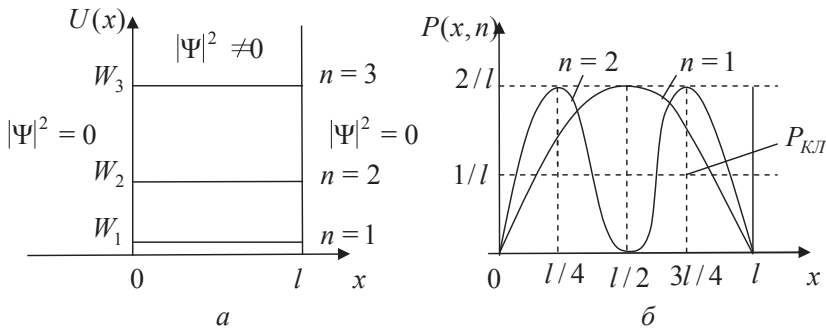


Рис. 5.6

Решение уравнения Шредингера. Уравнение Шредингера необходимо решать в области $0 \leq x \leq l$, в которой $U(x) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = W \psi \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} + k^2 \psi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}.$$

Решением этого уравнения является сумма двух плоских монохроматических волн де Бройля (бегущей и отраженной)

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Стандартные условия в этой задаче записываются следующим образом:

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow \psi(x) = 2Ai \sin(kx).$$

$$\psi(l) = 0 \Rightarrow \sin(kl) = 0 \Rightarrow kl = \pi n \Rightarrow \psi_n(x) = 2Ai \sin(\pi n x / l), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В формулу для волновой функции входит номер квантового состояния n , причем значение $n = 0$ исключается, т. к. для значения $n = 0$ вероятность найти частицу внутри потенциальной ямы и вне ее будет равна нулю, т. е. частица не существует, а это противоречит условию задачи.

Условие нормировки позволяет найти постоянную A

$$\int_0^l |\psi_n(x)|^2 dx = \int_0^l 4A^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l}x\right) dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{1}{2l}}.$$

В итоге для собственных волновых функций можно записать

$$\psi_n(x) = i\sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.13)$$

Для собственных значений энергии частицы получим:

$$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k_n = \frac{\pi n}{l} \Rightarrow k_n = \frac{\pi n}{l},$$

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.14)$$

Анализ полученного решения. В классической механике энергетический спектр частицы является непрерывным, минимальное значение энергии равно нулю, т. е. частица может «находиться» на дне потенциальной ямы.

В квантовой механике из формулы (5.14) следует, что энергетический спектр частицы является дискретным и расходящимся, минимальное значение энергии отлично от нуля и равно W_1 (см. рис. 5.6, а)

$$\Delta W_{n+1,n} = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (2n+1), \quad W_{\min} = W_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (5.15)$$

Состояние частицы при квантовом числе n , равном единице ($n=1$), называется основным состоянием частицы, а все остальные ее состояния называются возбужденными.

Как видно, выводы классической и квантовой механики при малых значениях квантового числа n находятся в резком несоответствии между собой.

Можно показать, что отличие минимального значения энергии частицы от нуля является следствием ее волновых свойств. Действительно, неопределенность координаты частицы в потенциальной яме равна ее ширине $\Delta x = l$, что позволяет из соотношения неопределенностей Гейзенберга провести оценку неопределенности задания импульса частицы $\Delta p_x \geq \hbar/\Delta x = \hbar/l$. Понятие импульса можно использовать в тех случаях, когда значение импульса будет не меньше погрешности его определения: $p_x \geq \Delta p_x$. Тогда минимальное значение импульса частицы будет равно $p_x = \Delta p_x$, что приводит к оценке минимального значения энергии частицы внутри потенциальной ямы

$$W_{\text{мин}} = \frac{(p_{x \text{ мин}})^2}{2m} = \frac{(\Delta p_x)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2ml^2}. \quad (5.16)$$

Полученное из соотношения неопределенностей значение $W_{\text{мин}}$ по порядку величины соответствует значению энергии частицы в основном квантовом состоянии ($n=1$), рассчитанному по формуле (5.14).

Обсудим теперь *вероятность обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы*.

В классической механике частица движется равномерно по траектории от одной стенки до другой, поэтому классическая плотность вероятности обнаружения частицы будет одинаковой во всех точках потенциальной ямы, т. к. частица одинаковое время находится вблизи любой точки.

Запишем формулу для квантовой плотности вероятности обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы

$$P(x, n) = |\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right). \quad (5.17)$$

Из формулы (5.17) следует, что квантовая плотность вероятности обнаружения микрочастицы внутри потенциальной ямы зависит от координаты x и от номера квантового состояния n , что не согласуется

с движением частицы по траектории. Так, например, для квантового состояния с $n=1$ плотность вероятности $P(x, 1)$ на краях потенциальной ямы равна нулю, а в ее середине будет максимальной. Число пиков на зависимости $P(x, n)$ будет равно номеру квантового состояния n , а вся площадь под графиками плотности вероятности будет одинаковой и равной единице (см. рис. 5.6, б).

Вероятность обнаружения частицы в квантовом состоянии n внутри потенциальной ямы в области пространства $l_1 \leq x \leq l_2$ равна площади под графиком соответствующей плотности вероятности $P(x, n)$ и ограниченной по оси абсцисс значениями l_1 и l_2 , а также может быть вычислена по формуле

$$\int_{l_1}^{l_2} P(x, n) dx = \int_{l_1}^{l_2} |\psi_n(x)|^2 dx = \int_{l_1}^{l_2} \frac{2}{l} \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx. \quad (5.18)$$

Итак, движение частицы внутри потенциальной ямы при небольших значениях n необходимо описывать в рамках квантовой механики. Однако, при больших значениях квантового числа n возможно применение классической механики при описании движения микрочастицы. Это связано с тем, что при увеличении n возрастает модуль волнового вектора \vec{k} ($k_n = \pi n/l$), следовательно, уменьшается длина волны де Бройля ($\lambda_B = 2\pi/k_n = 2l/n$), соответствующая движению частицы, и при некотором значении n будет выполняться условие применимости классической механики для описания движения микрочастицы: $\lambda_B \ll l$. Причем для больших n происходит относительное сближение энергетических уровней, энергетический спектр становится квазинепрерывным, т.е. дискретным, но дискретностью можно пренебречь по сравнению со значениями энергии квантовых состояний

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\Delta W_{n+1, n}}{W_n} = \frac{2n+1}{n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta W_{n+1, n} \ll W_n.$$

Большое число максимумов и минимумов на графике зависимости плотности вероятности от координаты x (при большом n) приводит к тому, что усредненное значение $\langle P(x, n) \rangle$ квантовой плотности вероятности будет совпадать с классическим значением плотности вероятности.

Рассмотренный пример — это пример соответствия выводов квантовой и классической теории при больших значениях квантовых чисел, является частным случаем *принципа соответствия*, который гласит: *при больших значениях квантовых чисел выводы квантовой механики должны соответствовать выводам классической механики.*

5.3.2. Туннельный эффект

Потенциальным барьером называется область пространства, в которой потенциальная энергия частицы больше, чем в соседних областях.

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную задачу о движении частиц с энергией W вдоль оси Ox . Частицы из области 1 налетают на прямоугольный потенциальный барьер (область 2) высотой U_0 , причем $W < U_0$ (см. рис. 5.7, а). Необходимо ответить на вопрос: что происходит с частицами при их встрече с потенциальным барьером?

В классической механике все частицы, для которых $W < U_0$, отражаются от потенциального барьера и летят обратно. Проникновения частиц в области 2 и 3 (область за барьером) нет.

Решение уравнения Шредингера. В квантовой механике, чтобы описать движение микрочастиц при их встрече с потенциальным барьером, необходимо решить уравнение Шредингера в трех областях (см. рис. 5.7, а). Запишем уравнение Шредингера для каждой из областей и сразу приведем их решения.

$$\text{Область 1: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} = W \psi_1 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + k_1^2 \psi_1 = 0, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}},$$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}.$$

$$\text{Область 2: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + U_0 = W \psi_2 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} - k_2^2 \psi_2 = 0,$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(U_0 - W)}{\hbar^2}}, \quad \psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x} \approx B e^{-k_2 x}.$$

$$\text{Область 3: } -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} = W \psi_3 \Rightarrow \frac{d^2 \psi_3}{dx^2} + k_3^2 \psi_3 = 0, \quad k_3 = k_1 = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}},$$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ik_3 x} + B_3 e^{-ik_3 x} = A_3 e^{ik_3 x}, \quad k_3 = k_1.$$

Из решения уравнения Шредингера для второй области видно, что оно не носит волнового характера (в показатель экспоненты не входит мнимая единица), т. е. решение нельзя представить в виде гармонической функции синуса или косинуса. Это означает, что частица не может находиться в этой области сколь угодно долго, по истечении определенного промежутка времени она должна покинуть эту область пространства. В третьей области пространства отражения нет, поэтому отраженной волны в третьей области не будет.

Полученные в ходе решения уравнения Шредингера для трех областей волновые функции необходимо «сшить» на границе этих областей, т. е. наложить на волновые функции стандартные условия.

На рис. 5.7, б приведен график зависимости квадрата модуля волновой функции от координаты x с учетом стандартных условий (условий сшивания), накладываемых на волновые функции на границах потенциального барьера. Из рис. 5.7, б видно, что вероятность обнаружения микрочастицы внутри потенциального барьера (вторая область) уменьшается с ростом координаты x и что вероятность найти микрочастицу в области 3 (область за барьером) будет отлична от нуля.

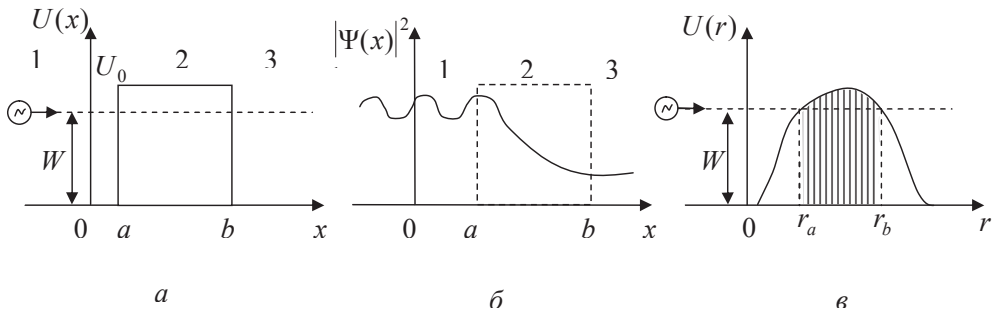


Рис. 5.7

Анализ полученного решения. При встрече микрочастиц с потенциальным барьером возникает *туннельный эффект* — явление проникновения частиц сквозь высокий ($W < U_0$) потенциальный барьер. *Коэффициент прозрачности D потенциального барьера* — величина, определяющая вероятность проникновения частиц сквозь потенциальный барьер и равен отношению интенсивности волны, прошедшей потенциальный барьер, к интенсивности волны, падающей на барьер. Это отно-

шение интенсивностей волн можно найти с учетом условий сшивания, накладываемых на волновую функцию на границах потенциального барьера (см. рис. 5.7)

$$D = \frac{I_{\text{прош}}}{I_{\text{пад}}} = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{|\psi_2(b)|^2}{|\psi_2(a)|^2} = \exp(-2k_2(b-a)) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U_0-W)}(b-a)\right). \quad (5.19)$$

Как видно из уравнения (5.19), вероятность прохождения частицы сквозь прямоугольный потенциальный барьер зависит от массы частицы (m), ширины потенциального барьера ($b-a$) и соотношения между высотой потенциального барьера и полной энергией налетающей на барьер частицы ($U_0 - W$).

В случае потенциального барьера $U(r)$ произвольной формы (см. рис. 5.7, в) для коэффициента прозрачности можно получить следующую формулу:

$$D = \prod_i D_i = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{r_a}^{r_b} \sqrt{2m(U(r)-W)} dr\right). \quad (5.20)$$

При выводе формулы (5.20) область потенциального барьера $r_a \leq r \leq r_b$, в которой полная энергия частицы меньше ее потенциальной энергии (см. рис. 5.7, в), разбивается на совокупность прямоугольных потенциальных барьеров. Для каждого из них находится коэффициент прозрачности D_i (i — номер прямоугольного барьера), затем, для определения коэффициента прозрачности D всего барьера, коэффициенты D_i перемножаются. Для увеличения точности расчетов ширина прямоугольных потенциальных барьеров стремится к нулю, а их число i стремится к бесконечности ($i \rightarrow \infty$).

Туннельный эффект объясняет многие наблюдаемые на опыте явления, такие, например, как α -распад ядер, холодную эмиссию электронов из металла и т. д.

Возникает вопрос: *почему классическая частица не может проникать внутрь барьера, а микрочастицы имеют такую возможность?* Можно привести следующее объяснение. В классической механике в произвольный момент времени t точно известны координата \vec{r} и импульс \vec{p} частицы. Это позволяет точно выделить вклады в полную энергию частицы от ее потенциальной и кинетической энергии — $W(\vec{r}, \vec{p}) = W_K(p) + U(\vec{r})$. Поэтому в области потенциального барьера, где полная энергия частицы меньше ее потенциальной энергии, кинетическая энергия отрицательна, что невозможно в классической механике.

тическая энергия частицы будет меньше нуля ($W_k = (W - U) < 0$). Это невозможно согласно определению кинетической энергии.

В квантовой механике, в соответствии с соотношениями неопределенности Гейзенберга, нельзя одновременно точно задать координаты частицы и ее импульс. Поэтому точное деление полной энергии частицы на ее кинетическую и потенциальную энергии невозможно. Это позволяет частице проникать внутрь потенциального барьера на короткое время.

Действительно, в начальные моменты времени (Δt — мало) внутри потенциального барьера погрешность в определении энергии частицы $\Delta W \geq (\hbar / \Delta t)$ будет достаточно большой и может превышать энергию самой частицы $\Delta W > W$. Это не позволяет установить точные значения кинетической и потенциальной энергии частицы. С течением времени погрешность в определении полной энергии частицы уменьшается и, соответственно, становится возможным установить с достаточной точностью значение кинетической энергии частицы внутри потенциального барьера. В этот момент времени частица должна уйти из области потенциального барьера, что не позволяет обнаружить отрицательные значения кинетической энергии частицы.

Аналогичным образом объясняется и существование виртуальных частиц, которые переносят различные виды взаимодействия в физике элементарных частиц.

6. Основы физики атомного ядра

6.1. Строение и состав атомного ядра

В опытах Резерфорда по рассеянию α -частиц веществом (1911 г.) было доказано, что положительный заряд и практически вся масса атома сосредоточены в малом по размерам ядре (линейные размеры ядра составляют порядка $10^{-14} \div 10^{-15}$ м, а размеры атома $\sim 10^{-10}$ м).

Сначала считалось, что в состав ядра входят протоны и электроны. Но вскоре такая модель ядра была отвергнута из-за того, что она противоречила многим фактам (например, спинам и магнитным моментам ядер). К тому же легкие по сравнению с протоном электроны ($m_p = 1870 m_e$) не могут входить в состав ядра в силу его малых размеров.

После открытия нейтрона (Чедвик, 1932 г.) окончательно сложилась протонно-нейтронная модель атомного ядра. Массы протона и нейтрона примерно одинаковы и равны: $m_p = 1,00759$ а.е.м. = 938,28 МэВ, $m_n = 1,00898$ а.е.м. = 939,57 МэВ. Протон имеет положительный электрический заряд, равный по модулю заряду электрона ($q_p = |e|$), а нейтрон электрического заряда не имеет.

6.1.1. Характеристики атомного ядра

1. *Обозначение ядра.* Ядро химического элемента X принято обозначать символом ${}_Z^AX$. Здесь Z называют *зарядовым числом* — оно определяет заряд ядра ($Z|e|$) или порядковый номер элемента в Периодической системе элементов, или число электронов в электрически

нейтральном атоме; $A = (Z + N)$ — *массовое число*, оно дает суммарное число протонов (Z) и нейтронов (N) в ядре или число нуклонов в ядре.

2. Типы ядер. Среди ядер выделяют разные группы ядер, отметим некоторые из них:

— *изотопы* — это ядра, у которых одинаковое число протонов ($Z_1 = Z_2$), но разное число нейтронов ($N_1 \neq N_2$); так, например, для водорода имеется три изотопа — протий ${}^1_1\text{H}$, дейтерий ${}^2_1\text{H}$ и тритий ${}^3_1\text{H}$;

— *изобары* — это ядра, у которых одинаковые массовые числа ($A_1 = A_2$), но разные зарядовые числа ($Z_1 \neq Z_2$), эти ядра образуются, например, при β -распаде ядер;

— *изомеры* — ядра, у которых одинаковое число нейтронов ($N_1 = N_2$), но разное число протонов ($Z_1 \neq Z_2$).

У всех ядер существуют изотопы. Это приводит к тому, что приводимое в системе элементов Д. И. Менделеева для каждого элемента массовое число не является целым, т. к. оно учитывает наличие разных изотопов для данного элемента и процентное содержание их в земной коре.

3. Размеры ядер. В предположении сферической формы ядра, для зависимости радиуса ядра от его массового числа, экспериментально, с помощью различных методик, была получена следующая формула:

$$R = (1,2 \div 1,5) \cdot 10^{-15} A^{1/3} \text{ м.} \quad (6.1)$$

Из нее следует, что плотность ядерного вещества во всех ядрах примерно одинакова, т. е. ядерное вещество несжимаемо

$$\rho = m/V \approx m_p A / (4\pi R^3 / 3) \approx 10^{17} \text{ кг/м}^3, \quad (6.2)$$

и его плотность чрезвычайно велика по сравнению с плотностью обычных веществ.

6.1.2. Ядерные силы. Свойства ядерных сил

Между нуклонами в ядре действуют ядерные силы, возникает новый вид взаимодействия — сильное взаимодействие. Ядерные силы обладают следующими свойствами:

1. *Они по интенсивности превосходят кулоновские примерно в 100 раз.* Поэтому ядерные силы удерживают в ядре положительно заряженные

протоны, между которыми также действуют кулоновские силы отталкивания.

2. *Ядерные силы не зависят от электрического заряда частиц*, т. е. интенсивность ядерного взаимодействия между протоном и нейтроном, нейтроном и нейтроном, протоном и протоном одинаковы, вследствие этого нейтроны также удерживаются вместе внутри ядра.

3. *Ядерные силы приводят к тому, что ядро является устойчивым образованием*, т. е. при его получении выделяется энергия. Она называется *энергией связи атомного ядра* и рассчитывается по формуле

$$W_{\text{CB}} = \Delta mc^2 = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} ((A - Z)m_n + Zm_p - m_{\text{я}}), \quad (6.3)$$

где разность масс Δm называют *дефектом массы*.

Энергия связи W_{CB} атомного ядра представляет собой минимальную энергию, которую нужно сообщить ядру, чтобы разделить его на отдельные нуклоны и развести их на расстояния, на которых они не взаимодействуют. Для удобства расчетов энергии связи ее выражают в МэВ, а массы частиц — в атомных единицах массы. Кроме того, в формуле (6.3) вместо массы ядра и массы протона вводят массы нейтрального атома и атома водорода. Это является удобным приемом, т. к. измерить экспериментально массу ядра достаточно сложно, и если это невозможно, то требуется удаление всех электронов из атома. Получаемая при этом неточность в расчетах является малой (она равна энергии взаимодействия электронов с ядром). В этом случае формула (6.3) примет вид

$$W_{\text{CB}} = \Delta mc^2 = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} ((A - Z)m_n + Zm_H - m_{\text{АТОМА}}). \quad (6.4)$$

Для сравнения прочности ядер, для оценки силы взаимодействия нуклонов в ядре вводят *удельную энергию связи*. Удельная энергия связи — энергия связи, приходящаяся на один нуклон,

$$W_{\text{уд}} = W_{\text{CB}} / A. \quad (6.5)$$

Усредненный график зависимости удельной энергии связи от массового числа приведен на рис. 6.1. Из него следует, что наиболее прочными являются ядра элементов с массовыми числами порядка 50, т. е. вблизи железа, у них наблюдаются самые большие значения $W_{\text{уд}}$.

Такая зависимость $W_{\text{уд}}$ приводит к выводу о возможности выделения энергии для двух типов ядерных реакций — это реакции деления тяжелых ядер и синтеза легких ядер. В таких реакциях образуются более устойчивые ядра, т. е. ядра с большей удельной энергией связи.

Так, например, если ядро с массовым числом 200 ($W_{\text{уд}} \approx 7,8$ МэВ) разделить на два ядра с массовыми числами 100 ($W_{\text{уд}} = 8,6$ МэВ), то при этом будет выделяться энергия, равная $W_{\text{яд}} \approx 200 \cdot (8,6 - 7,8) = 160$ МэВ.

4. *Ядерные силы зависят от ориентации спинового момента нуклонов.* Так, атом дейтерия образуется только в том случае, когда спиновые моменты протона и нейтрона направлены параллельно друг другу.

5. *Ядерные силы не являются центральными*, т. е. их нельзя представить как силы, действующие вдоль прямой, соединяющей нуклоны. Это, в частности, проявляется в зависимости ядерных сил от спина нуклонов.

6. *Ядерные силы обладают свойством насыщения.* Это подтверждается тем фактом, что удельная энергия связи ядра $W_{\text{уд}}$ слабо изменяется при переходе от одного ядра к другому (при массовых числах ядер A , больших 20). Уменьшение $W_{\text{уд}}$ при больших массовых числах связано с тем, что при увеличении порядкового номера элемента возрастает сила кулоновского отталкивания протонов внутри ядра. Это приводит к меньшей устойчивости ядер, их удельная энергия связи уменьшается (рис. 6.1).

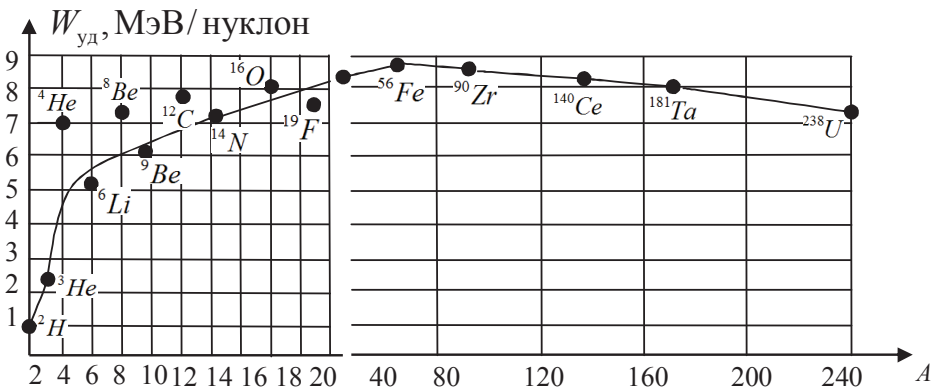


Рис. 6.1

7. *Ядерные силы являются короткодействующими.* Этот факт позволяет объяснить механизм распада тяжелых ядер. Так, при попадании

нейтрона в ядро оно возбуждается и принимает различные формы и, в частности, форму в виде гантели (рис. 6.2). В узкой области перешейка ядерные силы будут ослаблены (в них участвует малое количество ядер), поэтому за счет дальнodelствующих кулоновских сил (их интенсивность при этом не ослабевает) ядро распадается, образуя два осколка, разлетающиеся с большими скоростями, и два-три нейтрона. Энергия при ядерной реакции выделяется, в основном, в виде кинетической энергии разлетающихся осколков.

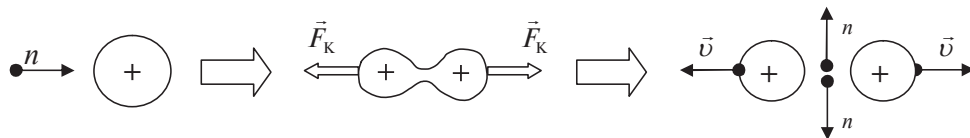


Рис. 6.2

6.1.3. Модели атомного ядра

Как было отмечено выше, ядро представляет собой систему сильно взаимодействующих частиц, причем ядерные силы не являются центральными. Это не позволяет в рамках квантовой механики точно решить задачу на движение частиц внутри ядра.

В связи с этим в настоящее время используют ряд моделей, которые описывают достаточно хорошо то или иное свойство ядер.

1. *Капельная модель ядра.* В этой модели ядро рассматривается, как капля заряженной жидкости. Ядро и заряженную каплю жидкости объединяют такие свойства, как несжимаемость ядерного вещества и жидкости, а также короткодействующий характер сил, действующих между нуклонами и между молекулами жидкости.

Капельная модель также помогает объяснить механизм деления тяжелых ядер (см. рис. 6.2 и пояснения к нему).

2. *Оболочечная модель ядра* рассматривает ядро как квантовую систему, в которой в потенциальном поле ядра движутся нуклоны. Решение квантовой задачи на движение частиц в потенциальном поле приводит к возникновению дискретного набора уровней энергии отдельно для протонов и нейтронов.

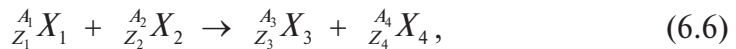
Эта модель объясняет существование наиболее устойчивых ядер (их называют магическими ядрами). Согласно этой модели они соответствуют полностью заполненным нейтронным или протонным обо-

лочкам. К ним относятся ядра с числом протонов или нейтронов, равным 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126 и 184. А если происходит одновременное заполнение нейтронных и протонных оболочек, то такие ядра будут наиболее устойчивыми (дважды магические ядра), это ядра гелия ${}^4_2\text{He}$, кислорода ${}^{16}_8\text{O}$, кальция ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ и ${}^{48}_{20}\text{Ca}$, свинца ${}^{208}_{82}\text{Pb}$.

В настоящее время разрабатываются обобщенная модель ядра, которая учитывает особенности как капельной, так и оболочечной моделей ядра.

6.2. Ядерные реакции

Под ядерной реакцией понимают процесс взаимодействия ядер или ядра и элементарной частицы, приводящий к их взаимному превращению. Общая схема ядерной реакции выглядит таким образом:



или в краткой форме

$$X(a,b)Y, \quad (6.7)$$

где X, Y — обозначают исходное и образующееся в результате реакции ядро; a, b — известные частицы, которые часто встречаются в различных ядерных реакциях, — это электрон (e^-), позитрон (e^+), протон (p), нейтрон (n), α -частица (${}^4_2\text{He}$) и т. д.

При протекании любой ядерной реакции выполняются следующие законы сохранения:

1) энергии W ($W_1 + W_2 = W_3 + W_4$); 2) импульса \vec{p} ($\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$); 3) момента импульса \vec{L} ($\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_3 + \vec{L}_4$); 4) электрического заряда Z ($Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$); 5) массового числа A ($A_1 + A_2 = A_3 + A_4$).

Можно также отметить выполнение законов сохранения, введенных для описания взаимодействий между элементарными частицами. Это законы сохранения лептонного заряда, изоспина (только в сильном взаимодействии), четности (за исключением реакций, происходящих с участием слабого взаимодействия, это β -распады) и т. д.

Энергия ядерной реакции W_p — это энергия, которая выделяется или поглощается при протекании ядерной реакции. По определению она равна разности энергий покоя исходных ядер (частиц) и ядер (частиц), образующихся в результате ядерной реакции

$$W_p = (W_{01} + W_{02}) - (W_{03} + W_{04}) = 931,5 \frac{\text{МэВ}}{\text{а.е.м.}} ((m_{01} + m_{02}) - (m_{03} + m_{04})). \quad (6.8)$$

Учитывая закон сохранения энергии и разделение полной энергии на энергию покоя и кинетическую энергию ($W = W_0 + W_k$), можно записать следующую формулу:

$$W_p = (W_{k3} + W_{k4}) - (W_{k1} + W_{k2}). \quad (6.9)$$

Согласно выражению (6.9) энергия при ядерной реакции выделяется ($W_p > 0$) в виде кинетической энергии продуктов реакции. Если же $W_p < 0$, то энергия при протекании ядерной реакции поглощается.

6.3. Явление радиоактивности

6.3.1. Виды радиоактивного распада ядер

Явление радиоактивности (р-а) заключается в самопроизвольном распаде ядер с испусканием элементарных частиц. Выделяют бета (β)- и альфа (α)-распады, они сопровождаются испусканием гамма (γ)-лучей. Атомное ядро, испытывающее (р-а) распад, называют *материнским*, а образующееся при этом ядро — *дочерним*.

Для того чтобы определить параметры ядра, получаемого при (р-а) распаде, применяют правила смещения, они позволяют правильно установить изменение таких параметров ядра, как его заряд и массовое число.

Выделяют *три вида β -распада* — это β^- -распад (из ядра вылетает электрон e^-), β^+ -распад (из ядра вылетает позитрон e^+) и *электронный захват* (e -захват, ядро захватывает один электрон с K -слоя, L -слоя, M -слоя и т. д.). При α -распаде из ядра вылетает α -частица, представляющая собой ядро атома гелия (спин и магнитный момент α -частицы равны нулю).

Для этих видов распада правила смещения записываются следующим образом:

$$\beta^- \text{-распад: } {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e, \quad (6.10)$$

$$\beta^+ \text{-распад: } {}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_{+1} e, \quad (6.11)$$

$$e\text{-захват: } {}^A_Z X + {}^0_{-1} e \rightarrow {}^A_{Z-1} Y, \quad (6.12)$$

$$\gamma\text{-распад: } {}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}. \quad (6.13)$$

Из этих правил следует, что все радиоактивные ядра объединяются в (р-а) семейства, число которых равно четырем — это семейства (или ряды) тория ${}^{232}_{90} \text{Th}$ ($n \leq 58$), нептуния ${}^{237}_{93} \text{Np}$ ($n \leq 59$), урана ${}^{238}_{92} \text{U}$ ($n \leq 59$) и актиния ${}^{235}_{89} \text{Ac}$ ($n \leq 58$). Для них массовое число определяется следующим образом:

$$A_1 = 4n, \quad A_2 = 4n + 1, \quad A_3 = 4n + 2, \quad A_4 = 4n + 3, \quad (6.14)$$

где число n принимает целочисленные значения.

Каждый член ряда получается из предыдущего путем α - или β -распадов. Поэтому у соседних членов ряда массовые числа либо одинаковы (они являются изобарами) или отличаются на четыре.

6.3.2. Основной закон радиоактивного распада.

Активность радиоактивного вещества

1. Основной закон радиоактивного распада. Для любого радиоактивного вещества нельзя предсказать момент времени распада того или иного ядра, известна лишь вероятность его распада. Причем на распад ядра не влияет тип вещества, его нагрев, сжатие — ядро распадается само по себе, независимо от других ядер.

Все это свидетельствует о том, что все процессы (р-а) распада подчиняются общим законам, согласно которым вероятность распада одного ядра в единицу времени является для данного типа ядра постоянной величиной. Ее принято называть *постоянной распада* λ , она дает вероятность распада одного ядра за единицу времени. Если обозначить число ядер, не распавшихся в радиоактивном веществе к момен-

ту времени t , через N , а число распавшихся за время $(t, t + dt)$ ядер через dN ($dN < 0$), то для вероятности распада ядра за единицу времени можно записать

$$dN / (Ndt) = -\lambda,$$

откуда следует *основной закон радиоактивного распада*

$$dN / N = -\lambda dt \Rightarrow d(\ln N) = -\lambda dt \Rightarrow \int_{N_0}^N d(\ln N) = -\int_0^t \lambda dt \Rightarrow$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (6.15)$$

В выражении (6.15) через N_0 обозначено начальное число радиоактивных ядер в веществе.

2. Период полураспада T . Среднее время жизни τ радиоактивного ядра. Для количественного описания явления (р-а) вводят понятия периода T полураспада и среднего времени τ жизни ядра.

Период полураспада T — это время, за которое распадается половина первоначального количества ядер: $t = T \Rightarrow N = N_0 / 2$. Он связан с постоянной распада λ формулой

$$\lambda = \ln 2 / T. \quad (6.16)$$

Получим формулу для среднего времени τ жизни ядра. За время $(t, t + dt)$ распадается dN ядер, их время жизни можно считать одинаковым и равным t , это связано с малостью интервала dt . Суммарное время жизни этих ядер будет равно $(-tdN)$. Суммируя время жизни ядер по всем интервалам dt от нуля до бесконечности и деля эту сумму на первоначальное количество частиц N_0 , получим

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty (-tdN) = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty (\lambda t) N dt = \int_0^\infty (\lambda t) e^{-\lambda t} dt = 1 / \lambda,$$

$$\tau = 1 / \lambda = T / \ln 2. \quad (6.17)$$

3. Активность радиоактивного вещества. Для описания интенсивности протекания процессов распада в радиоактивном веществе вводят понятие активности радиоактивного вещества. *Активность радиоактивного вещества определяет число распадов в (р-а) веществе за единицу времени*

$$A = -dN / dt = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}, \quad (6.18)$$

где начальная активность A_0 (р-а) вещества равна

$$A_0 = \frac{\ln 2}{T} N_0. \quad (6.19)$$

Единицей измерения активности в СИ является беккерель (Бк). При активности (р-а) вещества в 1 Бк в веществе происходит один распад за одну секунду (1 Бк = 1 распад/с). Применяется более крупная единица, называемая кюри, она составляет 1 Ки = $3,7 \cdot 10^{10}$ распад/с.

6.3.3. β -распад ядер

Как известно, электроны и позитроны не входят в состав ядра, поэтому они образуются в момент вылета из ядра при распаде нуклонов за счет слабого взаимодействия. Следовательно, β -распад это внутри-нуклонный процесс. При этом протекают следующие реакции:

$$\beta^- \text{-распад: } n \rightarrow p + e^- + \tilde{\nu}_e, \quad (6.20)$$

$$\beta^+ \text{-распад: } p \rightarrow n + e^+ + \nu_e, \quad (6.21)$$

$$e\text{-захват: } p + e^- \rightarrow n + \tilde{\nu}_e. \quad (6.22)$$

Реакция (6.20) протекает с выделением энергии, поэтому она может протекать и для нейтрона, находящегося в свободном состоянии. Реакция (6.21) происходит с поглощением энергии и поэтому протекает только внутри ядра, где протон может получить необходимую для протекания такой реакции энергию от других нуклонов.

Электронный захват сопровождается характеристическим рентгеновским излучением, вызванным переходами электронов на освободившееся место либо в K -слое, либо в L -слое и т. д.

Нужно отметить, что исторически частицы нейтрино (антинейтрино) были открыты в реакциях β^- -распада ядер. На существование этих частиц указывали сплошной спектр энергий вылетающих из атома электронов, а также нарушение законов сохранения импульса и момента импульса в этих реакциях. Так, энергетический спектр электро-

нов (он дает распределение числа электронов dN по кинетическим энергиям W_k) оказался сплошным, кинетическая энергия вылетающих электронов изменялась непрерывно от нуля до максимального значения $W_{k\max}$ (рис. 6.3). Этот факт можно было объяснить тем, что при такой реакции образуется еще одна частица (антинейтрино), которая и забирает у электрона часть освобождающейся при реакции энергии (такое предположение сделал Паули, а название частице было дано Ферми).

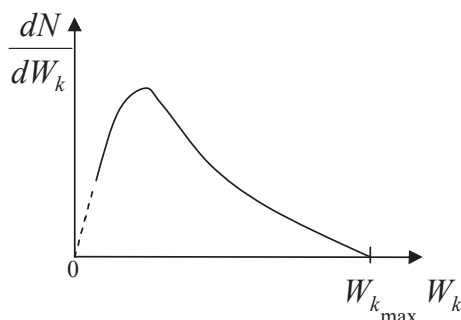


Рис. 6.3

Причем распределение энергии между этими частицами будет различным для отдельных актов распада. Для случая $W_k = W_{k\max}$ электрон забирает практически всю энергию.

Для того чтобы определить параметры ядра, получаемого при (p-а) распаде, применяют правила смещения, они позволяют правильно установить изменение таких параметров ядра, как его заряд и массовое число. Эти правила были введены задолго до открытия частиц нейтрино и антинейтрино. Однако, в связи с тем, что массовое число и электрический заряд нейтрино и антинейтрино равны нулю, их присутствие в реакциях распада не сказывается на правилах смещения. Необходимо помнить, что отсутствие нейтрино (антинейтрино) в реакциях (6.10) и (6.11) приводит к невыполнению закона сохранения лептонного заряда, вводимого для частиц, вступающих в слабые взаимодействия.

При прохождении β -излучения через вещество большая часть энергии тратится на ионизацию и возбуждение атомов и молекул среды. Присутствуют также и радиационные потери (при столкновениях изменяется скорость частицы и происходит излучение фотонов). Ин-

тенсивность пучка электронов за счет этих процессов плавно убывает до нуля.

Пробег β -частиц в средах различен и зависит от энергии частиц и плотности среды. β -частицы с энергией меньше 0,1 МэВ проходят в воздухе путь, равный 10 см, в биологических тканях 0,16 мм, а β -частицы с энергией больше 1 МэВ соответственно 11 и 17,5 мм.

6.3.4. α -распад ядер

α -распад наблюдается для ядер, содержащих большое число нуклонов ($A > 200$, $Z > 82$), число таких ядер превышает 200, имеется также около 20 α -радиоактивных ядер среди лантанидов. Среднее время жизни (τ -а) ядер колеблется в широких пределах от $3 \cdot 10^{-27}$ с (^{212}Po) до $(2 \div 5) \cdot 10^{15}$ лет (^{142}Ce , ^{144}Nd). Энергия α -частиц, испускаемых тяжелыми ядрами, составляет порядка $(4 \div 9)$ МэВ, а ядрами лантанидов — $(2 \div 4,5)$ МэВ.

Широкие пределы изменения среднего времени τ жизни (периода полураспада T) (τ -а) ядер при сравнительно малых изменениях энергии W_α вылетающих α -частиц находят свое отражение в экспериментально установленной формуле (Гейгер и Неттолла, 1911 г.)

$$\ln T = b / \sqrt{W_\alpha} + c, \quad (6.23)$$

из нее, в частности, следует, что

$$T = \exp(b / \sqrt{W_\alpha} + c). \quad (6.24)$$

В формуле (6.23) постоянные величины b , c определяются из опыта. Из выражения (6.24) видно, что малые изменения энергии α -частицы (показателя экспоненты) приводят к существенному изменению периода полураспада T , т.е. самой экспоненты.

Теоретическое объяснение α -распада получил на основе туннельного эффекта. α -частица, которая образуется в момент вылета из ядра, встречает на границе ядра высокий потенциальный барьер, который она преодолевает за счет туннельного эффекта (см. п. 5.3.2). Для вероятности выхода α -частицы из ядра, т.е. для коэффициента прозрачности D можно получить следующую формулу:

$$D = \exp(-\text{const} / \sqrt{W_\alpha}). \quad (6.25)$$

Из формулы (6.24) можно получить формулу Гейгера — Неттолла (6.23), если учесть, что коэффициент прозрачности D прямо пропорционален постоянной распада λ .

Отметим, что для (p-а) ядер одного семейства, испытывающих α -распад, энергия вылетающих α -частиц изменяется незначительно относительно определенного значения W_0 : $W_\alpha = W_0 + \Delta W_\alpha$, $\Delta W_\alpha \ll W_0$. В соответствии с формулой (6.24) малые изменения энергии α -частиц должны привести к существенным изменениям периодов T полураспада (на несколько порядков), что также подтверждается экспериментом.

Энергия, выделяемая при α -распаде, делится между α -частицей и дочерним ядром обратно пропорционально их массам. Если дочернее ядро образуется в возбужденном состоянии, то кинетическая энергия α -частицы уменьшается на энергию возбуждения и, напротив, возрастает, если распадается возбужденное ядро.

Дискретность энергетических уровней энергии ядра приводит к тому, что возникают несколько групп α -частиц, имеющих одну и ту же кинетическую энергию. Следовательно, тонкая структура спектров α -частиц позволяет определить энергию возбужденных состояний ядер.

Проходя через вещество, α -частицы вызывают ионизацию и возбуждение атомов и молекул, а также диссоциацию молекул. Потери энергии α -частиц на образование ядер отдачи и тормозное излучение будут незначительными.

Большая начальная скорость α -частиц ($v \approx 10^7$ м/с) приводит к тому, что до остановки они успевают образовать на своем пути примерно 10^5 пар ионов.

Траектория движения α -частиц представляет собой отрезок прямой, причем интенсивность пучка α -частиц остается постоянной, если пройденный ими путь меньше длины пробега R (это расстояние, проходимое в веществе частицей до ее полной остановки, т. е. до момента времени, когда она приходит в тепловое равновесие с окружающей средой). В воздухе длина пробега α -частиц составляет несколько сантиметров, для плотных веществ — порядка 0,01 мм.

6.3.5. γ -излучение ядер

γ -излучение не представляет собой самостоятельный вид радиоактивного распада. Оно сопровождает α - и β -распады, а также любые взаимные превращения ядер, при которых происходит переход ядра из возбужденных состояний в основное.

Установлено, что γ -излучение испускается дочерним (а не материнским) ядром при его переходе из возбужденного состояния в основное состояние.

γ -кванты не имеют электрического заряда, поэтому на них не действуют кулоновские силы. Масса покоя γ -квантов равна нулю, поэтому они могут двигаться только со скоростью света c , т. е. они не могут замедляться в веществе, как α -частицы и электроны.

Параллельный пучок γ -квантов при прохождении через вещество рассеивается за счет таких процессов, как фотоэффект, эффект Комптона и образование электронно-позитронной пары.

Для образования электронно-позитронной пары ($\gamma \rightarrow e^- + e^+$) необходима энергия γ -кванта, равная $W_\gamma = 1,02$ МэВ, — это минимальная энергия, необходимая для образования электронно-позитронной пары. Поэтому этот процесс наблюдается при энергиях $W_\gamma \geq 1,02$ МэВ и является при таких энергиях практически единственным процессом поглощения γ -излучения в веществе.

6.3.6. Цепные реакции деления тяжелых ядер

Цепная реакция деления тяжелых ядер — это ядерная реакция, самопроизвольно поддерживающаяся в веществе за счет вовлечения в нее все нового и нового числа делящихся ядер. Среди изотопов урана ее можно осуществить для ядра ^{235}U . Под действием нейтрона, попадающего в ядро, оно возбуждается и делится на два радиоактивных осколка (ядра) разной массы, которые разлетаются с большими скоростями, и на два-три нейтрона (см. рис. 6.4).

Нейтроны, вылетающие в процессе деления из ядра, могут, в свою очередь, вызвать реакцию деления соседних ядер ^{235}U , которые также испускают нейтроны, способные вызвать дальнейшее деление ядер. В итоге число делящихся ядер возрастает, возникает цепная реакция.

Исследования показали, что деление может происходить разными путями, наиболее вероятным является деление на осколки, массы которых

относятся как 2 : 3. Запишем одну из возможных реакций деления ^{235}U :

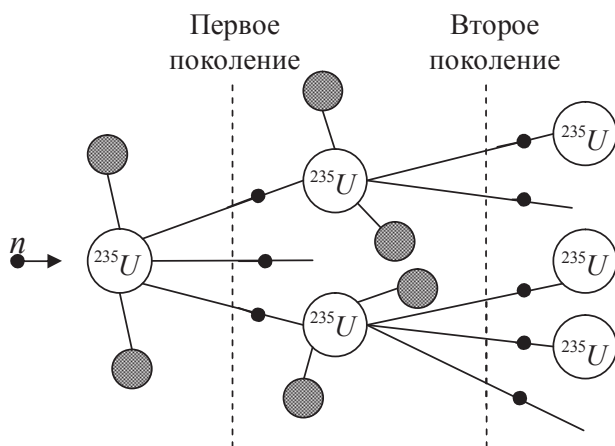
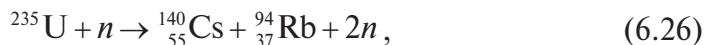


Рис. 6.4

Получаемые при делении урана осколки являются радиоактивными и после ряда превращений из них получают стабильные изотопы церия и циркония (формула (6.27)).

Энергетический выход при делении ядра урана составляет примерно 1 МэВ на нуклон, причем основную часть энергии уносят осколки.

Основная характеристика ядерного реактора — его мощность. Мощность в 1 МВт соответствует цепной реакции, в которой происходит $3 \cdot 10^{16}$ актов деления в 1 с.

Состояние реактора характеризуется коэффициентом размножения нейтронов, он дает быстроту роста числа нейтронов, вызывающих деление ядер, и равен отношению числа нейтронов, вызвавших деление в данном поколении, к числу аналогичных нейтронов предыдущего поколения. Для цепной реакции, изображенной на рис. 6.4, коэффициент размножения нейтронов равен $K = 3/2 = 1,5$. Если эффективный коэффициент размножения нейтронов $K_{\text{эф}}$ в активной зоне больше единицы ($K_{\text{эф}} > 1$), то цепная реакция нарастает во времени; если $K_{\text{эф}} < 1$, то реакция затухает, а при $K_{\text{эф}} = 1$ идет стационарный процесс, число делений постоянно во времени. В качестве делящегося ве-

щества в ядерном реакторе применяют ^{235}U , ^{239}Pu , ^{233}U . Если активная зона, кроме ядерного топлива содержит замедлитель нейтронов (графит, вода и другие вещества, содержащие легкие ядра), то основная часть делений происходит под действием тепловых нейтронов.

6.3.7. Термоядерные реакции

Термоядерные реакции. Существует еще одно перспективное направление в ядерной энергетике, это управляемый термоядерный синтез (УТС). Под ним понимают процесс слияния легких атомных ядер, проходящий с выделением энергии, при высоких температурах в регулируемых управляемых условиях.

Среди реакций синтеза легких ядер для УТС представляют интерес следующие термоядерные реакции:



В скобках указана энергия, которая выделяется при протекании реакции. Реакции синтеза легких ядер называют термоядерными, т. к. протекание таких реакций требует больших температур (порядка $T \approx 10^9 \text{ K}$), при которых смесь веществ превращается в плазму (ионизированный газ).

Действительно, для того чтобы началась ядерная реакция, необходимо сблизить ядра до расстояний, на которых вступают в игру ядерные силы (порядка 10^{-15} м). Для этого необходимо преодолеть кулоновское отталкивание ядер, что можно сделать, сообщая ядрам большую начальную скорость их сближения, т. е. нагревая плазму до высокой температуры.

Разогрев плазмы до высоких температур является первым препятствием на пути осуществления термоядерного синтеза. Для нагрева плазмы свыше температуры $T \approx 10^8 \text{ K}$ применяют высокочастотный нагрев или ввод энергии в плазму с помощью потока быстрых нейтральных частиц.

Вторым препятствием для осуществления УТС является необходимость удержания плазмы длительное время вне контакта со стенками рабочей камеры, т. к. любой контакт приводит к резкому снижению температуры плазмы и прекращению термоядерных реакций.

6.3.8. Типы фундаментальных взаимодействий

Согласно современным представлениям в природе осуществляется четыре типа фундаментальных взаимодействий: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Каждое из них можно охарактеризовать приведенными ниже параметрами.

1. Константа взаимодействия α характеризует максимальное значение силы взаимодействия или энергии взаимодействия, она является безразмерной величиной.

2. Радиус взаимодействия r — расстояние, на котором эти взаимодействия являются наиболее интенсивными.

3. Длительность $\Delta t_{\text{вз}}$ протекания процессов взаимодействия частиц за счет данного вида взаимодействия.

Сильное взаимодействие — обеспечивает связь нуклонов в ядре. Константа сильного взаимодействия имеет значение 10. Максимальное расстояние, на котором проявляется сильное взаимодействие (*радиус действия r*), не превышает 10^{-15} м.

Электромагнитное взаимодействие — обеспечивает связь частиц (тел), имеющих электрический заряд. Константа взаимодействия равна $1/137 \approx 10^{-2}$. Радиус действия не ограничен ($r = \infty$).

Слабое взаимодействие ответственно:

- за все виды β -распада ядер (включая e -захват),
- за многие распады элементарных частиц,
- за все процессы взаимодействия нейтрино с веществом.

Константа взаимодействия равна 10^{-14} . Слабое взаимодействие, как и сильное, является короткодействующим (радиус действия $r \sim 10^{-18}$ м).

Гравитационное взаимодействие — присуще всем частицам (телам). Константа взаимодействия имеет значение порядка 10^{-39} . Радиус действия неограничен ($r = \infty$). Гравитационное взаимодействие является *универсальным*, ему подвержены все без исключения элементарные частицы. В процессах микромира гравитационное взаимодействие ощутимой роли не играет.

Список библиографических ссылок

1. Валишев М. Г., Повзнер А. А. Физика. Часть 3. Электромагнетизм: учебное пособие. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. — 55 с.
2. Малышев Л. Г., Повзнер А. А. Избранные главы курса физики. Электромагнетизм: учебное пособие. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 169 с.
3. Валишев М. Г., Повзнер А. А. Физика. Часть 4. Колебания и волны: учебное пособие. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. — 90 с.
4. Валишев М. Г., Повзнер А. А. Курс общей физики: учебное пособие. — СПб: Лань, 2010. — 576 с.
5. Валишев М. Г., Повзнер А. А. Физика. Часть 5. Волновая оптика: учебное пособие. — Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2006. — 61 с.
6. Основные законы классической физики в примерах и задачах / Л. Г. Малышев [и др.]; под ред. Ф. А. Сидоренко. — Екатеринбург: УрФУ, 2013. — 404 с.

Оглавление

1. Электромагнитные явления	3
1.1. Опыты Фарадея. Явление электромагнитной индукции	3
1.2. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Природа сторонних сил. Правило Ленца	4
1.3. Применение явления электромагнитной индукции в технике.....	8
1.4. Явление самоиндукции	10
1.4.1. Индуктивность контура. Индуктивность соленоида	10
1.4.2. ЭДС самоиндукции. Правило Ленца.....	11
1.4.3. Зависимость силы тока от времени при размыкании и замыкании цепи	12
1.4.4. Энергия магнитного поля контура с током. Объемная плотность энергии магнитного поля	13
2. Колебания и волны	15
2.1. Незатухающие механические колебания	15
2.1.1. Условия возникновения колебаний	15
2.1.2. Уравнение незатухающих гармонических колебаний. Основные характеристики незатухающих колебаний (на примере пружинного маятника)	17
2.2. Сложение гармонических колебаний	20
2.2.1. Векторная диаграмма. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты	20
2.2.2. Биения.....	23
2.2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу	25
2.3. Затухающие колебания	27
2.3.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение	27
2.3.2. Характеристики, вводимые для описания затухающих колебаний.....	29
2.4. Вынужденные механические колебания.....	31
2.4.1. Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний и его решение.....	31

2.4.2. Механический резонанс.....	32
2.4.3. Некоторые примеры проявления резонанса в природе и технике	34
2.5. Волны в упругой среде	34
2.5.1. Основные характеристики волн	35
2.5.2. Уравнение плоской механической волны. Волновое уравнение.....	36
2.5.3. Стоячие волны	38
2.6. Свободные незатухающие электромагнитные колебания	40
2.6.1. Колебательный контур. Условия возникновения колебаний.....	40
2.6.2. Уравнения незатухающих электромагнитных колебаний. Основные характеристики незатухающих электромагнитных колебаний.....	42
2.7. Затухающие электромагнитные колебания	44
2.7.1. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение	44
2.7.2. Характеристики затухающих электромагнитных колебаний....	46
2.8. Электромагнитные волны	47
2.8.1. Основные свойства электромагнитных волн. Волновое уравнение.....	47
2.8.2. Объемная плотность энергии ЭМВ. Поток энергии. Вектор Умова — Пойтинга	50
2.8.3. Поведение ЭМВ на границе раздела двух сред	51
3. Волновая оптика.....	53
3.1. Интерференция света	53
3.1.1. Оптическая разность хода. Условия максимального усиления и ослабления света при интерференции.....	55
3.1.2. Расчет интерференционной картины от двух когерентных источников света (опыт Юнга).....	57
3.1.3. Интерференция в тонких пленках	58
3.1.4. Полосы равной толщины (клин, кольца Ньютона) и полосы равного наклона.....	60
3.1.5. Практическое применение интерференции света	64
3.2. Дифракция	65
3.2.1. Принцип Гюйгенса — Френеля. Метод зон Френеля.....	66
3.2.2. Дифракция Френеля на диске и на круглом отверстии	69

3.2.3. Амплитудная и фазовая зонные пластинки.	71
3.2.4. Дифракция в параллельных лучах на одной щели	71
3.2.5. Дифракция на одномерной дифракционной решетке.....	73
3.3. Поляризация света.....	75
3.3.1. Естественный и поляризованный свет. Виды поляризованного света	75
3.3.2. Получение линейно поляризованного света. Закон Малюса	77
3.3.3. Поляризация света при отражении. Закон Брюстера	78
4. Квантовая оптика	81
4.1. Тепловое излучение	81
4.1.1. Характеристики, вводимые для описания параметров теплового излучения. Закон Кирхгофа	81
4.1.2. Модель абсолютно черного тела. Экспериментальные законы теплового излучения а.ч.т.	84
4.1.3. Формула Релея — Джинса. Ультрафиолетовая катастрофа. Формула Планка.....	87
4.2. Внешний фотоэффект	90
4.2.1. Вольт-амперная характеристика, ее основные закономерности	91
4.2.2. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта	92
4.2.3. Опытные законы фотоэффекта, их объяснение	93
4.2.4. Зависимость задерживающего напряжения от частоты. Многофотонный фотоэффект	96
4.3. Эффект Комптона.....	97
4.4. Природа электромагнитного излучения. Корпускулярно-волновой дуализм.....	99
5. Элементы квантовой механики.....	102
5.1. Идея де Бройля. Опыты, подтверждающие волновые свойства микрочастиц	102
5.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга	106
5.2.1. Соотношения неопределенностей как проявление волновых свойств.....	106
5.2.2. Условия применимости классической механики для описания движения микрочастиц	109

5.3. Волновая функция. Стандартные условия.	
Уравнение Шредингера	111
5.3.1. Микрочастица в прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.....	114
5.3.2. Туннельный эффект	118
6. Основы физики атомного ядра	122
6.1. Строение и состав атомного ядра.....	122
6.1.1. Характеристики атомного ядра	122
6.1.2. Ядерные силы. Свойства ядерных сил.....	123
6.1.3. Модели атомного ядра.....	126
6.2. Ядерные реакции	127
6.3. Явление радиоактивности	128
6.3.1. Виды радиоактивного распада ядер.....	128
6.3.2. Основной закон радиоактивного распада. Активность радиоактивного вещества.....	129
6.3.3. β -распад ядер	131
6.3.4. α -распад ядер	133
6.3.5. γ -излучение ядер.....	135
6.3.6. Цепные реакции деления тяжелых ядер	135
6.3.7. Термоядерные реакции	137
6.3.8. Типы фундаментальных взаимодействий	138
Список библиографических ссылок	140

Учебное издание

Повзнер Александр Александрович
Андреева Анна Григорьевна
Шумихина Кямаля Арифовна

ФИЗИКА
Базовый курс
Часть II

Редактор Н. П. Кубыщенко
Верстка Е. В. Ровнушкиной

Подписано в печать 22.12.2016. Формат 70×100 1/16.
Бумага писчая. Цифровая печать. Усл. печ. л. 11,6.
Уч.-изд. л. 6,6. Тираж 100 экз. Заказ 8.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

